Cezar Marcel DOCA

ÎNCOVOIEREA BARELOR

ESEU FALSIFICABIL

Editura Universităţii din Piteşti – 2007

ISBN: 978-973-690-683-1

CUVÂNT ÎNAINTE

Principiul falsificaţionismului – discutat formal pentru prima dată de Karl Popper în 1919-1920, reformulat apoi tot de către el în 1960 şi dezvoltat ulterior de Imre Lakatos – afirmă că o lucrare, pentru a fi utilă sau chiar şi numai ştiinţifică, trebuie să fie falsificabilă, adică să poată fi verificată şi infirmată. Nu confirmarea acesteia este importantă ci infirmarea ei, adică falsificarea ipotezelor pe cale experimentală sau prin observaţii.

În spiritul raţionalismului critic, ipotezele şi teoriile sunt considerate adevărate doar până la prima lor infirmare.

Această carte nu se substituie vreunui tratat, manual sau curs de specialitate: nici de rezistenţa materialelor, nici de analiză matematică, nici de programare.

Prezenta lucrarea este cu deosebire o culegere de formule şi algoritmi de calcul cu aplicabilitate imediată în studiul încovoierilor statice şi vibratorii ale barelor continue, omogene şi drepte.

Toate informaţiile cuprinse în eseul de faţă sunt oferite cititorului sub GNU Free Documentation Licence.

AUTORUL

Institutul de Cercetări Nucleare Piteşti

CUPRINS

INTRODUCERE 7
ÎNCOVOIEREA STATICĂ 9
ECUAŢII, ALGORITMI ŞI SOLUŢII 25
EVALUĂRI NUMERICE 51
VIBRAŢII DE ÎNVOVOIERE 69
VIBRAŢII INDUSE DE CURGEREA PARALELĂ. . .85
CONCLUZII 101
BIBLIOGRAFIE 103
ANEXE 105

INTRODUCERE

Sub titlul de mai sus ar trebui să fie enumerate cel puţin câteva idei iniţiale privind elaborarea, respectiv lecturarea celorlalte capitole.

Aşadar:

- deşi nu este de specialitatea presupusă, autorul s-a aflat de mai multe ori în situaţia de a rezolva probleme de încovoiere statică şi în regim vibratoriu pentru diferite configuraţii de bare (tuburi, grinzi etc.) montate în instalaţii tehnologice;

- paginile ce urmează reprezintă, în ultimă instanţă, un rezumat al conspectului cuprinzând principalele ipoteze, ecuaţii, soluţii exacte, formule de evaluare şi algoritmi de calcul, utilizate în studiile teoretice (şi experimentale) în domeniu;

- prin prezentul eseu se oferă cititorului avizat o relativ cuprinzătoare colecţie de informaţii, abordabilă măcar şi pentru faptul că toate acestea nu mai trebuie să fie „redescoperite” prin diferite lucrări dispersate.

ÎNCOVOIEREA STATICĂ

Literatura de specialitate dedicată *Rezistenţei materialelor* este infinit mai bogată decât ar putea autorul să parcurgă şi să indice ca referinţe bibliografice.

Prezentul capitol cuprinde doar o sumară trecere în revistă a principalelor rezultate teoretice privitoare la încovoierea statică a barelor continue, omogene şi drepte, unele aspecte fiind reluate şi în completările din Anexele lucrării.

Ipotezele mecanicii corpurilor deformabile

Studiul deformării corpurilor solide este fundament pe următoarele ipoteze de calcul:

- *Ipoteza corpurilor continue, omogene şi izotrope* – modelele teoretice se elaborează folosind: 1) funcţii continue şi 2) constante de material având aceleaşi valori în orice punct al corpului solid.
- *Ipoteza identităţii proprietăţilor mecanice ale elementului infinit mic cu cele ale corpului solid întreg* – în fapt, nu se iau în considerare forţele intercristaline.
- *Ipoteza elasticităţii perfecte* – sub anumite valori ale eforturilor unitare, deformaţiile se anulează odată cu dispariţia sarcinilor care le-au generat.

- *Ipoteza proporţionalităţii dintre eforturi şi deformaţii* – corpul elastic satisface legea lui Hooke, deformaţiile supunându-se *principiului suprapunerii efectelor*.

- *Ipoteza micilor deformaţii*, cunoscută şi sub denumirea de *ipoteza menţinerii dimensiunilor iniţiale* – corpul suferă: 1) *deformaţii absolute* foarte mici în raport cu dimensiunile sale geometrice, respectiv 2) *deformaţii specifice* neglijabile în raport cu unitatea. Funcţie de complexitatea modelului teoretic, calculele se clasifică în: *de ordinul I* atunci când ecuaţiile de echilibru se scriu pentru starea nedeformată, *de ordinul II* atunci când se utilizează o schemă deformată dar se acceptă că deformaţiile sunt mici şi *de ordinul III* atunci când, renunţându-se la ipoteza micilor deformaţii, se au în vedere deformaţiile mari.

- *Principiul lui Saint-Vénant* – sisteme diferite de forţe echivalente static produc efecte apreciabil diferite doar în punctele de aplicaţie.

- *Ipoteza lui Bernoulli*: secţiunile plane şi normale pe axa unei bare înainte de deformare rămân plane şi normale pe aceasta axă şi după deformare.

- *Ipoteza stării naturale a corpului* sau *ipoteza absenţei tensiunilor iniţiale*.

Eforturi şi solicitări

Corpul solid se poate deforma sub acţiunea unei *forţe* (*totale*) *R* sau / şi a unui *moment* / *cuplul* (*total*) *M*.

Mărimile *R* şi *M* se numesc *eforturi* şi pun în evidenţă acţiunea reciprocă dintre două secţiuni ale corpului solid.

Putând avea direcţii oarecare în spaţiu, eforturile *R* şi *M* se descompun în: *componente normale la* planul secţiunii şi *componente conţinute în* planul acestei secţiuni, cele două tipuri de proiecţii producând, individual, solicitări simple.

În cazul concret al unei bare (continue, omogene şi drepte) forţa totală *R* are:

- o componentă *N*, *normală* la planul secţiunii, numită *forţă axială* (fiind aplicată pe axa barei) – produce fie solicitarea de *întindere*, fie solicitarea de *compresiune*;

- o componentă *T*, numită *forţă tăietoare*, conţinută în planul secţiunii (perpendicular pe axa barei) – produce solicitarea de *tăiere* / *forfecare*.

La rândul său, momentul / cuplul total *M* se descompune în:

- *momentul de răsucire* M_t, al cărui vector este dirijat pe axă, deci perpendicular pe planul secţiunii – produce solicitarea de *răsucire* / *torsiune*;

- *momentul încovoietor* M_i, cu vectorul conţinut în planul secţiunii – produce solicitarea de *încovoiere*.

Acţiunea simultană a două sau mai multe eforturi poate da naştere unei *solicitări compuse*.

Ecuaţiile fibrei medii deformate pentru o bară supusă la solicitarea simplă de încovoiere

Sub acţiunea (doar a) momentului încovoietor $M(x)$ (s-a renunţat la indicele inferior *i*), axa unei bare orizontale, paralelă cu axa de coordonate *x*, devine o curbă plană continuă, denumită *fibră medie deformată*.

Dacă *du*, *dv* şi *dw* reprezintă deplasările / deformările pe cele trei axe carteziene *x*, *y* şi *z*, atunci, în planul (vertical) *xOz*, fibra deformată are raza de curbură:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI(x)}$$

unde prin *E* s-a indicat modulul de elasticitate al (materialului) barei, iar $I(x)$ reprezintă momentul ei de inerţie. Produsul $EI(x)$ se numeşte *rigiditate*.

Convenindu-se că sensul pozitiv al *rotirii* $d\theta$ este cel orar (deci negativ trigonometric), atunci:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{1}{\rho(x)} = -\frac{M(x)}{EI(x)} \qquad (*)$$

Deformându-se, bara suferă atât deplasări în lungul său – „translaţia" *u*, cât şi perpendiculare pe axă – *săgeata w*.

Neglijând deplasarea *u* în raport cu săgeata *w*, tangenta unghiului θ se poate scrie:

$$tg\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx}$$

În cazul micilor deformaţii:

$$tg\theta(x) \approx sin\,\theta(x) \approx \theta(x)$$

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx}$$

şi:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{d^2w(x)}{dx^2}$$

rezultat care, introdus în (*) conduce la concluzia că fibrei medii deformate i se asociază *ecuaţia diferenţială de ordinul II*:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{M(x)}{EI(x)} = 0 \qquad (1)$$

Pentru *barele static determinate*, adică atunci când momentul $M(x)$ poate fi determinat, în mod unic, direct din condiţiile de echilibru, ecuaţia diferenţială (1) se integrează de două ori şi se obţine funcţia ce descrie deplasarea / săgeata perpendiculară pe axa barei:

$$w(x) = C_0 + C_1 \cdot x - \int_1^x \left(\int_1^{\xi_1} \frac{M(\xi_2)}{EI(\xi_2)} d\xi_2 \right) d\xi_1$$

Constantele de integrare C_0 şi C_1 se pot determina:

- fie cunoscând săgeata $w(x)$ şi rotirea $\theta(x)$ în acelaşi punct $x = x^*$, sau în două puncte diferite ale barei: $x = x_1$ şi $x = x_2$;
- fie cunoscând săgeţile $w(x_1) \neq w(x_2)$ în două puncte oarecare ale barei.

Formulele de calcul (ecuaţiile) ce înglobează valorile $w(x)$ şi $\theta(x)$ corespunzătoare capetelor barei, ale căror abscise se obişnuieşte a se desemna prin: $x = 0$ şi $x = L$, reprezintă *condiţiile la limită*.

Egalitatea (1) mai este denumită şi *ecuaţia diferenţială simplificată*. Ecuaţia diferenţială *exactă* are expresia:

$$\frac{\dfrac{d^2w(x)}{dx^2}}{\left\{1+\left[\dfrac{dw(x)}{dx}\right]^2\right\}^{3/2}}+\frac{M(x)}{EI(x)}=0$$

Totuşi, atât timp cât, în orice punct al barei, pătratul tangentei unghiului de rotire $\theta(x)$ are valori neglijabile în raport cu unitatea – cerinţă specifică, de altfel, majorităţii problemelor de rezistenţă din practica inginerească – în locul ecuaţiei exacte se poate folosi, cu rezultate de încredere, direct ecuaţia simplificată.

Pe de altă parte, dacă se ţine cont şi de efectele forţei tăietoare $T(x)$ asupra deformării fibrei medii, atunci ecuaţia diferenţială de ordinul II (simplificată) devine:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2}=-\frac{M(x)}{EI(x)}-\frac{T(x)}{GA'(x)};\quad G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

unde G este modulul de forfecare, μ este coeficientul lui Poisson, iar $A'(x)$ este aria redusă a secţiunii transversale şi se calculează cu formula:

$$A'(x)=\frac{I^2(x)}{\displaystyle\int_{(A)}\frac{S^2}{b^2}dA}$$

Mărimea S din ultima formulă reprezintă *momentul static faţă de axa neutră, corespunzător părţii din secţiunea transversală care tinde să lunece*, iar b este o dimensiune geometrică a secţiunii.

De exemplu, în cazul unei secţiunii dreptunghiulare de arie A, calculele conduc la rezultatul $A' = 5A / 6$, iar în cazul unei secţiuni transversale circulare de arie A se obţine $A' = 9A / 10$.

Pentru *barele static nedeterminate* momentul de încovoiere $M(x)$ nu mai poate fi exprimat din ecuaţiile de echilibru, de această dată trebuind să fie rezolvată *ecuaţia diferenţială de ordinul IV a fibrei medii deformate*:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right]-q(x)=0 \qquad (2)$$

unde $q(x)$ este *sarcina distribuită* pe lungimea barei.

Cunoscând legile $I(x)$ şi $q(x)$, ecuaţia (2) se integrează de patru ori şi se obţine funcţia deplasării / săgeţii:

$$w(x)=C_o+C_1\cdot x+\int_1^x\left[\int_1^{\xi_1}\left(\frac{C_2}{I(\xi_2)}+\frac{C_3\xi_2}{I(\xi_2)}+\frac{\xi_2\int_1^{\xi_2}q(\xi_3)d\xi_3-\int_1^{\xi_2}\xi_3 q(\xi_3)d\xi_3}{EI(\xi_2)}\right)d\xi_2\right]d\xi_1$$

Constantele de integrare C_0, C_1, C_2 şi C_3 se determină şi de această dată impunând soluţiei să respecte, de exemplu, condiţiile de rezemare a barei, acestea din urmă fiind exprimate prin ecuaţii de caracterizare a deplasărilor (săgeţi şi rotiri) şi eforturilor (momente şi forţe tăietoare).

Funcţia $-EI(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}$ are dimensiunea unui moment, iar funcţia $-EI(x)\frac{d^3w(x)}{dx^3}$ are dimensiunea unei forţe.

Rezemarea la capete

Generalizând imaginea comună a unui corp solid sprijinindu-se (în câmp gravitaţional) pe un al doilea, prin *rezemare* s-ar putea desemna starea de echilibru mecanic într-un anumit punct (reazem), caracterizată prin valori cunoscute pentru: săgeţi, unghiuri de rotaţie, momente încovoietoare sau forţe tăietoare.

Astfel, capătul liber al unei bare montată în consolă este un *reazem* caracterizat prin moment încovoietor şi forţă tăietoare nule.

Renunţând la montajul în consolă, capătul neîncastrat al barei din exemplul anterior s-ar putea „rezema", eventual, pe o forţă externă, concentrată, acţionând de jos în sus.

Levitaţia magnetică (la capetele unei bare) reprezintă un caz de „sprijinire" fără contact mecanic; şi exemplele ar putea continua.

Ecuaţiile de caracterizare a reazemelor se numesc *condiţii omogene*, respectiv *condiţii neomogene*, după cum valorile indicate pentru: deplasare, rotire, moment încovoietor, sau forţă de forfecare *sunt nule*, respectiv *diferite de zero*.

Condiţiile ce se referă la modul de sprijinire în abscisele $x_* = 0$, respectiv $x_* = L$ caracterizează *reazemele de capăt*. Reazemele ale căror abscise îndeplinesc condiţia $0 < x_* < L$ se numesc *intermediare*.

Judecate după rolul lor de *cauză* sau *efect*, condiţiile neomogene invocând valorile exacte:

$$-EI(x_*)\cdot\left.\frac{d^3w(x)}{dx^3}\right|_{x=x_*} = T_*$$

$$-EI(x_*)\cdot\left.\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right|_{x=x_*} = M_*$$

$$\left.\frac{dw(x)}{dx}\right|_{x=x_*} = \theta_*$$

$$w(x_*) = w_*$$

reprezintă fie situaţii cărora trebuie să le facă faţă bara studiată, fie restricţii, eventual soluţii prescrise / aşteptate, în comportarea acesteia (pentru abscisa x_*).

Stărilor de *rezemare elastică* le sunt caracteristice legi ce se stabilesc între eforturi şi deplasări, anume:

- forţă tăietoare şi săgeată: $\left. -EI(x_*)\frac{d^3w(x)}{dx^3}\right|_{x=x_*} = kw(x_*)$

şi

- moment încovoietor şi rotire: $\left. -EI(x_*)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right|_{x=x_*} = -c\left.\frac{dw(x)}{dx}\right|_{x=x_*}$

mărimile k şi c fiind constante (elastice) de material.

Valorile limită $k = 0$ şi $k \to \infty$, respectiv $c = 0$ şi $c \to \infty$, generează, într-o interpretare intuitivă, condiţiile omogene:

$$\left. -EI(x_*)\frac{d^3w(x)}{dx^3}\right|_{x=x_*} = 0 \qquad \text{şi} \qquad w(x_*) = 0$$

respectiv:

$$\left. -EI(x_*)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right|_{x=x_*} = 0 \qquad \text{şi} \qquad \left.\frac{dw(x)}{dx}\right|_{x=x_*} = 0$$

ale căror combinaţii intervin în definirea / caracterizarea următoarelor reazeme de capăt:

- *capăt liber*: moment şi forţă nule $\begin{cases} \left.\dfrac{d^2w(x)}{dx^2}\right|_{x=x_*} = 0 \\ \left.\dfrac{d^3w(x)}{dx^3}\right|_{x=x_*} = 0 \end{cases}$

- *reazem alunecător*: rotire şi forţă nule $\begin{cases} \left.\dfrac{dw(x)}{dx}\right|_{x=x_*} = 0 \\ \left.\dfrac{d^3w(x)}{dx^3}\right|_{x=x_*} = 0 \end{cases}$

- *reazem simplu rigid*: săgeată şi moment nule $\begin{cases} w(x_*) = 0 \\ \left.\dfrac{d^2w(x)}{dx^2}\right|_{x=x_*} = 0 \end{cases}$

- *încastrare rigidă*: săgeată şi rotire nule $\begin{cases} w(x_*) = 0 \\ \left.\dfrac{dw(x)}{dx}\right|_{x=x_*} = 0 \end{cases}$

Valori finite *nenule* ale constantelor elastice *k* şi *c* se întâlnesc în ecuaţiile de caracterizare a reazemelor de capăt:

- *reazem elastic*: $\begin{cases} \left.\dfrac{d^2w(x)}{dx^2}\right|_{x=x_*} = 0 \\ -EI(x_*)\left.\dfrac{d^3w(x)}{dx^3}\right|_{x=x_*} = kw(x_*) \end{cases}$

- *încastrarea elastică*: $\begin{cases} w(x_*) = 0 \\ -EI(x_*)\left.\dfrac{d^2w(x)}{dx^2}\right|_{x=x_*} = -c\left.\dfrac{dw(x)}{dx}\right|_{x=x_*} \end{cases}$

- *rezemare generală*: $\begin{cases} -EI(x_*)\left.\dfrac{d^2w(x)}{dx^2}\right|_{x=x_*} = -c\left.\dfrac{dw(x)}{dx}\right|_{x=x_*} \\ -EI(x_*)\left.\dfrac{d^3w(x)}{dx^3}\right|_{x=x_*} = kw(x_*) \end{cases}$

Revenind la condiţiile (ecuaţiile) neomogene, este evident faptul că în capătul neîncastrat al unei barei pot acţiona oricând, din exterior, un moment (încovoietor) M_* şi / sau o forţă (tăietoare) concentrată F_* .

Spre exemplificare, reazemul elastic (de capăt) supus acţiunii externe concomitente a unui moment M_* şi a unei forţe F_* va fi caracterizat prin sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} -EI(x_*)\left.\dfrac{d^2w(x)}{dx^2}\right|_{x=x_*} = \pm M_* \\ -EI(x_*)\left.\dfrac{d^3w(x)}{dx^3}\right|_{x=x_*} = kw(x_*) \pm F_* \end{cases} \tag{3}$$

Din (3) se pot particulariza cinci situaţii caracterizate prin ecuaţii (condiţii) neomogene şi anume cele în care am avea numai acţiunea momentului exterior M_* ($F_* = 0$), sau numai pe cea a forţei concentrate F_* ($M_* = 0$), ambele fiind aplicate, eventual, direct în capăt liber ($k = 0$).

Deşi nu epuizează toate cazurile posibile, exemplele de mai sus permit desprinderea următoarelor concluzii imediate:

- un reazem de capăt este caracterizat de (cel puţin) două ecuaţii omogene şi / sau neomogene,

dar

- nu orice combinaţie de (câte două) ecuaţii omogene / neomogene amintite mai sus defineşte un reazem fizic.

Reazeme intermediare – încovoierea barei cu mai multe deschideri

Prin deschidere se înţelege segmentul de bară cuprins între două reazeme consecutive.

Din motive ţinând exclusiv de generalitatea algoritmului de calcul, vom include aici şi tipurile aparte de „reazeme" definite: în punctele de acţiune a forţelor concentrate şi / sau a momentelor de încovoiere externe, respectiv la limita de variaţie bruscă a proprietăţilor elastice şi / sau geometrice, sau a valorilor sarcinii distribuite.

Două bare se pot „sprijini reciproc" şi prin mijlocirea unei articulaţii intermediare (moment încovoietor nul).

O bară cu N_R reazeme (două reazeme de capăt şi N_R–2 reazeme intermediare) are N_R–1 deschideri.

Problema încovoierii barei cu mai multe deschideri se poate rezolva, de exemplu, parcurgând următorul algoritm:

- Se identifică cele N_R reazeme dispuse pe lungimea barei, împreună cu ecuaţiile lor de caracterizare.
- Se stabilesc funcţiile $M(x)$, $I(x)$, $q(x)$ etc. specifice celor N_R–1 deschideri.
- Fiecărei deschideri i (i = 1 ... N_R–1), i se ataşează ecuaţia diferenţială de ordinul IV a fibrei medii deformate, corespunzătoare situaţiei prezente între reazemele adiacente.
- Se integrează ecuaţiile pe fiecare deschidere în parte şi se obţine un număr de N – 1 soluţii pentru deplasări / săgeţi, cuprinzând 4(N_R–1) constante de integrare necunoscute: C_{i0}, C_{i1}, C_{i2} şi C_{i3}.
- Constantele de integrare C_{i0}, C_{i1}, C_{i2} şi C_{i3} se obţin ca soluţii ale sistemului (compatibil determinat) format din cele 4(N_R–1) ecuaţii (liniare) de caracterizare a reazemelor.

Ţinând cont de soluţiile $w_i(x)$ şi $w_{i+1}(x)$ specifice celor două deschideri adiacente, i şi $i+1$, pentru cazurile mai des întâlnite de reazem intermediar poziţionat în abscisa x_i avem ecuaţiile de caracterizare:

- *reazem simplu rigid*:

$$\begin{cases} w_i(x_i)=0 \\ w_{i+1}(x_i)=0 \\ \left.\dfrac{dw_i(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = \left.\dfrac{dw_{i+1}(x)}{dx}\right|_{x=x_i} \\ \left.\dfrac{d^2w_i(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} = \left.\dfrac{d^2w_{i+1}(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} \end{cases}$$

- *reazem simplu elastic*:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dw_i(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = \left.\dfrac{dw_{i+1}(x)}{dx}\right|_{x=x_i} \\ \left.\dfrac{d^2w_i(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} = \left.\dfrac{d^2w_{i+1}(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} \\ -EI(x_i)\left.\dfrac{d^3w_i(x)}{dx^3}\right|_{x=x_i} = kw_i(x_i) \\ -EI(x_i)\left.\dfrac{d^3w_{i+1}(x)}{dx^3}\right|_{x=x_i} = kw_{i+1}(x_i) \end{cases}$$

- *articulaţie intermediară*:

$$\begin{cases} w_i(x_i)=w_{i+1}(x_i) \\ \left.\dfrac{d^2w_i(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} = 0 \\ \left.\dfrac{d^2w_{i+1}(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} = 0 \\ \left.\dfrac{d^3w_i(x)}{dx^3}\right|_{x=x_i} = \left.\dfrac{d^3w_{i+1}(x)}{dx^3}\right|_{x=x_i} \end{cases}$$

Lista reazemelor intermediare poate fi completată cu situaţiile în care intervin, din exterior, momente şi / sau forţe concentrate, contribuţia acestor eforturi la fenomenul încovoierii fiind surprinsă atât prin *saltul funcţiei*

corespunzătoare (derivatele de ordinul doi şi / sau trei), cât şi prin *ecuaţii de continuitate*.

Cele două legităţi amintite în rândurile de mai sus se aplică, evident, în abscisa respectivului „reazem" intermediar.

Un exemplu (edificator) pur teoretic ar fi cazul acţiunilor concomitente ale momentului şi forţei exterioare într-un reazem (intermediar) elastic:

$$\begin{cases} w_i(x_i) = w_{i+1}(x_i) \\ \left.\dfrac{dw_i(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = \left.\dfrac{dw_{i+1}(x)}{dx}\right|_{x=x_i} \\ -EI(x_i)\left.\dfrac{d^2w_i(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} = -EI(x_i)\left.\dfrac{d^2w_{i+1}(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} \pm M_* \\ -EI(x_i)\left.\dfrac{d^3w_i(x)}{dx^3}\right|_{x=x_i} = -EI(x_i)\left.\dfrac{d^3w_{i+1}(x)}{dx^3}\right|_{x=x_i} + kw_{i+1}(x_i) \pm F_i \end{cases}$$

Dintre diferitele cazuri particulare ce se pot deduce plecând de la acest ultim sistem de ecuaţii amintind condiţia $k = 0$ caracteristică situaţiei când eforturile M_* şi F_* acţionează într-un punct (intermediar) liber; altfel spus, bara studiată nu prezintă, în abscisa x_i, alte restricţii mecanice.

Evitând complicarea expunerii prin descrieri intuitive, subliniem faptul că variaţiilor bruşte ale rigidităţii şi / sau ale sarcinii distribuite, în abscisa x_i a unui punct liber (= fără alte restricţii mecanice) de pe lungimea barei, li se asociază condiţiile de continuitate:

$$\begin{cases} w_i(x_i) = w_{i+1}(x_i) \\ \left.\dfrac{dw_i(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = \left.\dfrac{dw_{i+1}(x)}{dx}\right|_{x=x_i} \\ -E_iI_i(x_i)\left.\dfrac{d^2w_i(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} = -E_{i+1}I_{i+1}(x_i)\left.\dfrac{d^2w_{i+1}(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} \\ -E_iI_i(x_i)\left.\dfrac{d^3w_i(x)}{dx^3}\right|_{x=x_i} = -E_{i+1}I_{i+1}(x_i)\left.\dfrac{d^3w_{i+1}(x)}{dx^3}\right|_{x=x_i} \end{cases}$$

Dacă în abscisa x_i acţionează şi un reazem elastic, atunci vom avea sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dw_i(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = \left.\dfrac{dw_{i+1}(x)}{dx}\right|_{x=x_i} \\ -E_iI_i(x_i)\left.\dfrac{d^2w_i(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} = -E_{i+1}I_{i+1}(x_i)\left.\dfrac{d^2w_{i+1}(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} \\ -E_iI_i(x_i)\left.\dfrac{d^3w_i(x)}{dx^3}\right|_{x=x_i} = kw_i(x_1) \\ -E_{i+1}I_{i+1}(x_i)\left.\dfrac{d^3w_{i+1}(x)}{dx^3}\right|_{x=x_i} = kw_{i+1}(x_1) \end{cases}$$

ce poate fi completat (şi complicat), în continuare, cu aportul unor eventuale eforturi externe M_* şi / sau F_* concentrate în x_i.

Încovoierea barei aflată pe pat elastic

Un caz aparte de rezemare a unei bare este aşa-numitul *pat elastic*, caracterizat prin constanta elastică pe unitatea de lungime k_p, situaţie modelată prin ecuaţia diferenţială de ordinul IV a fibrei medii deformate:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right] + k_p w(x) - q(x) = 0$$

Încovoierea barei solicitată axial

Dacă asupra unei bare solicitată la încovoiere acţionează, suplimentar, şi o forţă N axială, atunci ecuaţia diferenţială de ordinul IV a fibrei medii deformate devine:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right]\pm N\frac{d^2w(x)}{dx^2}-q(x)=0$$

unde $\pm N$ se înlocuieşte cu $+N$ în cazul comprimării şi cu $-N$ în cazul întinderii, valoarea N fiind considerată întotdeauna pozitivă.

Trebuie reţinut faptul că în cazul acţiunii forţelor axiale, condiţiile de capăt referitoare la forţa tăietoare capătă forma:

$$-EI\frac{d^3w(x)}{dx^3}\mp N\frac{dw(x)}{dx}\bigg|_{x=x_*}=T(x_*)$$

Forţa de comprimare poate determina apariţia stării de flambaj.

ECUAŢII, ALGORITMI ŞI SOLUŢII

Combinând situaţiile prezentate în capitolul anterior se obţine ecuaţia diferenţială de ordinul IV a fibrei medii deformate pentru o bară care, sprijinindu-se pe pat elastic, este solicitată atât la încovoiere cât şi axial:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right] \pm N\frac{d^2w(x)}{dx^2} + k_p w(x) - q(x) = 0 \qquad (4)$$

Prezentând un recunoscut nivel de generalitate, ecuaţia (4) permite individualizarea unui număr relativ generos de exemple de încovoiere a barelor omogene şi drepte, şi anume:

- cu sau fără pat elastic (2 tipuri),
- cu sau fără forţă axială (3 tipuri),
- cu moment de inerţie constant sau variabil (2 tipuri),
- cu sarcină distribuită constantă sau variabilă (3 tipuri dacă se contorizează şi cazul sarcinii distribuite nule).

Ar rezulta cel puţin 2 × 3 × 2 × 3 = 36 de probleme (teoretice) de solicitare la încovoiere, după cum urmează:

Bară fără pat elastic, fără forţă axială, cu moment de inerţie constant şi sarcină distribuită constantă

Fiind date condiţiile:

$$k_p = 0 \qquad N = 0 \qquad I(x) = I_0 \qquad q(x) = q_0$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI_0 \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - q_0 = 0$$

şi are soluţia:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \frac{q_0}{24 EI_0} x^4$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

Bară fără pat elastic, fără forţă axială, cu moment de inerţie constant şi sarcină distribuită variabilă

Fiind date condiţiile:

$$k_p = 0 \qquad N = 0 \qquad I(x) = I_0 \qquad q(x)$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI_0 \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - q(x) = 0$$

şi are soluţia asigurată de algoritmul:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \int_1^x \left\{ \int_1^{\xi_1} \left[\int_1^{\xi_2} \left(\int_1^{\xi_3} \frac{q(\zeta_4)}{EI_0} d\xi_4 \right) d\xi_3 \right] d\xi_2 \right\} d\xi_1$$

În cazul particular:

$$q(x) = q_0 + q_1 x$$

avem:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \frac{q_0}{24EI_0} x^4 + \frac{q_1}{120EI_0} x^5$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \frac{q_1}{120EI_0} x^5$$

Bară fără pat elastic, fără forţă axială, cu moment de inerţie variabil şi sarcină distribuită constantă

Fiind date condiţiile:

$k_p = 0$ $\qquad$ $N = 0$ $\qquad$ $I(x)$ $\qquad$ $q(x) = q_0$

ecuaţia (4) devine:

$$EI(x)\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 2E\frac{dI(x)}{dx} \cdot \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + E\frac{d^2 I(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - q_0 = 0$$

şi are soluţia asigurată de algoritmul:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \int_1^x \left[\int_1^{\xi_1} \left(\frac{C_2}{I(\xi_2)} + \frac{C_3 \xi_2}{I(\xi_2)} + \frac{q_0 \xi_2^2}{2EI(\xi_2)} \right) d\xi_2 \right] d\xi_1$$

În cazul particular:

$$I(x) = I_1 e^{-\alpha \cdot x}$$

avem:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \frac{\left(6 - 4\alpha x + \alpha^2 x^2\right) q_0 + 2\left[-2C_3 + \left(C_2 + C_3 x\right)\alpha\right]\alpha EI_1}{2\alpha^4 EI_1} e^{\alpha x}$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \frac{-2C_3 + \left(C_2 + C_3 x\right)\alpha}{\alpha^3} e^{\alpha x}$$

Bară fără pat elastic, fără forţă axială, cu moment de inerţie variabil şi sarcină distribuită variabilă

Fiind date condiţiile:

$$k_p = 0 \qquad N = 0 \qquad I(x) \qquad q(x)$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI(x)\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 2E\frac{dI(x)}{dx} \cdot \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + E\frac{d^2 I(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - q(x) = 0$$

şi are soluţia asigurată de algoritmul:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \int_1^x \left[\int_1^{\xi_1} \left(\frac{C_2}{I(\xi_2)} + \frac{C_3 \xi_2}{I(\xi_2)} + \frac{\int_1^{\xi_2} \xi_2 q(\xi_3) d\xi_3 - \int_1^{\xi_2} \xi_3 q(\xi_3) d\xi_3}{EI(\xi_2)} \right) d\xi_2 \right] d\xi_1$$

În cazul particular:

$$I(x) = I_1 e^{-\alpha \cdot x}$$

avem:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \int_1^x \left\{ \int_1^{\xi_1} e^{\alpha \xi_2} \left[C_2 + C_3 \xi_2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int_1^{\xi_2} - \frac{\xi_3 p(\xi_3)}{EI_1} d\xi_3 + \xi_2 \int_1^{\xi_2} \frac{\xi_3 p(\xi_3)}{EI_1} d\xi_3 \right] d\xi_2 \right\} d\xi_1$$

Particularizând, în continuare, cu:

$$q(x) = q_0 + q_1 x$$

avem:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \left\{ -24 q_1 + 18(q_0 + q_1 x)\alpha - 6\left(2 q_0 x + q_1 x^2 + 2 EI_1 C_3\right)\alpha^2 + \right.$$

$$\left. + \left[3 q_0 x^2 + q_1 x^3 + 6(C_2 + C_3 x) EI_1 \right] \alpha^3 \right\} \frac{e^{\alpha x}}{6 \alpha^5 EI_1}$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \left\{ \left(-24 + 18 \alpha x - 6 \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 \right) q_1 + \right.$$

$$\left. + 6\left[-2 C_3 + (C_2 + C_3 x) \right] \alpha^2 EI_1 \right\} \frac{e^{\alpha x}}{6 \alpha^5 EI_1}$$

Bară fără pat elastic, forţă axială de compresie, cu moment de inerţie constant şi sarcină distribuită constantă

Fiind date condiţiile:

$$k_p = 0 \qquad N > 0 \qquad I(x) = I_0 \qquad q(x) = q_0$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI_0 \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + N \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - q_0 = 0$$

şi are soluţia generală:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \frac{q_0}{2N} x^2 - \frac{1}{\kappa^2}\left[C_2\, cos(\kappa \cdot x) + C_3\, sin(\kappa \cdot x)\right]$$

unde:

$$\kappa = \sqrt{\frac{N}{EI_0}}$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x) = C_0 + C_1 x - \frac{1}{\kappa^2}\left[C_2\, cos(\kappa \cdot x) + C_3\, sin(\kappa \cdot x)\right]$$

Bară fără pat elastic, forţă axială de compresie, cu moment de inerţie constant şi sarcină distribuită variabilă

Fiind date condiţiile:

$k_p = 0$ $\qquad$ $N > 0$ $\qquad$ $I(x) = I_0$ $\qquad$ $q(x)$

ecuaţia (4) devine:

$$EI_0 \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + N \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - q(x) = 0$$

şi are soluţia asigurată de algoritmul:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \int_1^x \left\{ \int_1^{\xi_1} \left[C_2\, cos(\kappa \cdot \xi_2) + C_3\, sin(\kappa \cdot \xi_2) - \right.\right.$$
$$- \frac{\kappa \cdot cos(\kappa \cdot \xi_2)}{N} \int_1^{\xi_2} q(\xi_3) sin(\kappa \cdot \xi_3) d\xi_3 +$$
$$\left.\left. + \frac{\kappa \cdot sin(\kappa \cdot \xi_2)}{N} \int_1^{\xi_2} q(\xi_3) cos(\kappa \cdot \xi_3) d\xi_3 \right] d\xi_2 \right\} d\xi_1$$

unde:

$$\kappa = \sqrt{\frac{N}{EI_0}}$$

În cazul particular:

$$q(x) = q_0 + q_1 x$$

avem:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \frac{q_0}{2N} x^2 + \frac{q_1}{6N} x^3 - \frac{1}{\kappa^2}\left[C_2\, cos(\kappa \cdot x) + C_3\, sin(\kappa \cdot x)\right]$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \frac{q_1}{6N} x^3 - \frac{1}{\kappa^2}\left[C_2\, cos(\kappa \cdot x) + C_3\, sin(\kappa \cdot x)\right]$$

Bară fără pat elastic, forţă axială de compresie, cu moment de inerţie variabil şi sarcină distribuită constantă

Fiind date condiţiile:

$$k_p = 0 \qquad N > 0 \qquad I(x) \qquad q(x) = q_0$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI(x)\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 2E\frac{dI(x)}{dx} \cdot \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + E\frac{dI^2(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + N\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - q_0 = 0$$

căreia autorul nu a reuşit să-i găsească o soluţie generală sau un algoritm de calcul asociat.

Totuşi, în cazul particular:

$$I(x) = I_1 e^{-\alpha \cdot x}$$

avem soluţia asigurată de algoritmul:

$$w(x)=C_0+C_1x+\int_1^x\left(\int_1^{\xi_1}\left\{e^{\alpha\xi_2}J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)C_2+2e^{\alpha\xi_2}Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)C_3+\right.\right.$$
$$+\frac{\pi q_0 e^{\alpha\xi_2}}{\alpha EI_1}\left[Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)\int_1^{\xi_2}J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_3}{2}}\right)d\xi_3-\right.$$
$$\left.\left.\left.-J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)\int_1^{\xi_2}Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_3}{2}}\right)d\xi_3\right]\right\}d\xi_2\right)d\xi_1$$

unde:

$$\kappa=\sqrt{\frac{N}{EI_1}}$$

Prin $J_0(z)$ şi $Y_0(z)$ s-au desemnat funcţiile Bessel de primul şi al doilea ordin.

Amintim faptul că funcţiile Bessel $J_n(z)$ şi $Y_n(z)$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale:

$$z^2y''+zy'+\left(z^2-n^2\right)y=0$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x)=C_0+C_1x+\int_1^x\left\{\int_1^{\xi_1}\left[e^{\alpha\xi_2}J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)C_2+2e^{\alpha\xi_2}Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)C_3\right]d\xi_2\right\}d\xi_1$$

Bară fără pat elastic, forţă axială de compresie, cu moment de inerţie variabil şi sarcină distribuită variabilă

Fiind date condiţiile:

$k_p = 0$ $\quad$ $N > 0$ $\quad$ $I(x)$ $\quad$ $q(x)$

ecuaţia (4) devine:

$$EI(x)\frac{d^4w(x)}{dx^4}+2E\frac{dI(x)}{dx}\cdot\frac{d^3w(x)}{dx^3}+E\frac{dI^2(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^2w(x)}{dx^2}+N\frac{d^2w(x)}{dx^2}-q(x)=0$$

căreia autorul nu a putut să-i găsească o soluţia generală sau un algoritm de calcul asociat.

Totuşi, în cazul particular:

$$I(x)=I_1e^{-\alpha\cdot x}$$

avem soluţia asigurată de algoritmul:

$$w(x)=C_0+C_1x+\int_1^x\left(\int_1^{\xi_1}\left\{e^{\alpha\xi_2}J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)C_2+2e^{\alpha\xi_2}Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)C_3+\right.\right.$$
$$+\frac{\pi e^{\alpha\xi_2}}{\alpha EI_1}\left[Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)\int_1^{\xi_2}q(\xi_3)J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_3}{2}}\right)d\xi_3-\right.$$
$$\left.\left.\left.-J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)\int_1^{\xi_2}q(\xi_3)Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_3}{2}}\right)d\xi_3\right]\right\}d\xi_2\right)d\xi_1$$

unde:

$$\kappa=\sqrt{\frac{N}{EI_1}}$$

Particularizând, în continuare, cu:

$$q(x)=q_0+q_1x$$

avem:

$$w(x)=C_0+C_1x+\int_1^x\left(\int_1^{\xi_1}\left\{e^{\alpha\xi_2}J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)C_2+2e^{\alpha\xi_2}Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)C_3+\right.\right.$$
$$+\frac{\pi e^{\alpha\xi_2}}{\alpha EI_1}\left[Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)\int_1^{\xi_2}(q_0+q_1\xi_3)J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_3}{2}}\right)d\xi_3-\right.$$
$$\left.\left.\left.-J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)\int_1^{\xi_2}(q_0+q_1\xi_3)Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_3}{2}}\right)d\xi_3\right]\right\}d\xi_2\right)d\xi_1$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x)=C_0+C_1x+\int_1^x\left(\int_1^{\xi_1}\left\{e^{\alpha\xi_2}J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)C_2+2e^{\alpha\xi_2}Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)C_3+\right.\right.$$
$$+\frac{\pi q_1 e^{\alpha\xi_2}}{\alpha EI_1}\left[Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)\int_1^{\xi_2}\xi_3 J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_3}{2}}\right)d\xi_3-\right.$$
$$\left.\left.\left.-J_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)\int_1^{\xi_2}\xi_3 Y_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_3}{2}}\right)d\xi_3\right]\right\}d\xi_2\right)d\xi_1$$

Bară fără pat elastic, forţă axială de întindere, cu moment de inerţie constant şi sarcină distribuită constantă

Fiind date condiţiile:

$$k_p = 0 \qquad N < 0 \qquad I(x) = I_0 \qquad q(x) = q_0$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI_0\frac{d^4w(x)}{dx^4}-N\frac{d^2w(x)}{dx^2}-q_0=0$$

şi are soluţia generală:

$$w(x) = C_0 + C_1 x - \frac{q_0}{2N} x^2 + \frac{1}{\kappa^2}\left(C_2 e^{\kappa \cdot x} + C_3 e^{-\kappa \cdot x}\right)$$

unde:

$$\kappa = \sqrt{\frac{N}{EI_0}}$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \frac{1}{\kappa^2}\left(C_2 e^{\kappa \cdot x} + C_3 e^{-\kappa \cdot x}\right)$$

Evident, soluţiile anterioare pot fi rescrise înlocuind funcţiile exponenţiale $exp(\kappa x)$ şi $exp(-\kappa x)$ prin intermediul funcţiilor hiperbolice: $sh(\kappa x)$ şi $ch(\kappa x)$

Bară fără pat elastic, forţă axială de întindere, cu moment de inerţie constant şi sarcină distribuită variabilă

Fiind date condiţiile:

$$k_p = 0 \qquad N < 0 \qquad I(x) = I_0 \qquad q(x)$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI_0 \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - N \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - q(x) = 0$$

şi are soluţia asigurată de algoritmul:

$$w(x) = C_0 + C_1 x + \int_1^x \left\{ \int_1^{\xi_1} \left[C_2 e^{\kappa \cdot \xi_2} + C_3 e^{-\kappa \cdot \xi_2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\kappa}{2N}\left(e^{\kappa \cdot \xi_2} \int_1^{\xi_2} q(\xi_3) e^{-\kappa \cdot \xi_3} d\xi_3 - e^{-\kappa \cdot \xi_2} \int_1^{\xi_2} q(\xi_3) e^{\kappa \cdot \xi_3} d\xi_3 \right) \right] d\xi_2 \right\} d\xi_1$$

unde:

$$\kappa = \sqrt{\frac{N}{EI_0}}$$

În cazul particular:

$$q(x) = q_0 + q_1 x$$

avem:

$$w(x) = C_0 + C_1 x - \frac{q_0}{2N} x^2 - \frac{q_1}{6N} x^3 + \frac{1}{\kappa^2}\left(C_2 e^{\kappa \cdot x} + C_3 e^{-\kappa \cdot x}\right)$$

Daca $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x) = C_0 + C_1 x - \frac{q_1}{6N} x^3 + \frac{1}{\kappa^2}\left(C_2 e^{\kappa \cdot x} + C_3 e^{-\kappa \cdot x}\right)$$

Evident, soluţiile anterioare pot fi rescrise înlocuind funcţiile exponenţiale $exp(\kappa x)$ şi $exp(-\kappa x)$ prin intermediul funcţiilor hiperbolice: $sh(\kappa x)$ şi $ch(\kappa x)$

Bară fără pat elastic, forţă axială de întindere, cu moment de inerţie variabil şi sarcină distribuită constantă

Fiind date condiţiile:

$k_p = 0$ $\qquad$ $N < 0$ $\qquad$ $I(x)$ $\qquad$ $q(x) = q_0$

ecuaţia (4) devine:

$$EI(x)\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 2E\frac{dI(x)}{dx}\cdot\frac{d^3 w(x)}{dx^3} + E\frac{dI^2(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - N\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - q_0 = 0$$

căreia autorul nu a putut să-i găsească o soluţia generală.

Totuşi, în cazul particular:

$$I(x) = I_1 e^{-\alpha \cdot x}$$

avem soluţia asigurată de algoritmul:

$$w(x)=C_0+C_1x+\int_1^x\left(\int_1^{\xi_1}\left\{C_2e^{\alpha\xi_2}I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)+2C_3e^{\alpha\xi_2}K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)-\right.\right.$$
$$-\frac{2q_0e^{\alpha\xi_2}}{\alpha EI_1}\left[K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)\int_1^{\xi_2}I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_3}{2}}\right)d\xi_3-\right.$$
$$\left.\left.\left.-I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)\int_1^{\xi_2}K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_3}{2}}\right)d\xi_3\right]\right\}d\xi_2\right)d\xi_1$$

unde:

$$\kappa=\sqrt{\frac{N}{EI_1}}$$

Prin I_0 şi K_0 s-au desemnat funcţiile Bessel de ordin întâi.

Reamintim faptul că funcţiile Bessel $I_n(z)$ şi $K_n(z)$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale:

$$z^2y''+zy'-\left(z^2+n^2\right)y=0$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x)=C_0+C_1x+\int_1^x\left\{\int_1^{\xi_1}\left[C_2e^{\alpha\xi_2}I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)+2C_3e^{\alpha\xi_2}K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\frac{\alpha\xi_2}{2}}\right)\right]d\xi_2\right\}d\xi_1$$

Bară fără pat elastic, forţă axială de întindere, cu moment de inerţie variabil şi sarcină distribuită variabilă

Fiind date condiţiile:

$k_p = 0$ $\qquad$ $N < 0$ $\qquad$ $I(x)$ $\qquad$ $q(x)$

ecuaţia (4) devine:

$$EI(x)\frac{d^4w(x)}{dx^4}+2E\frac{dI(x)}{dx}\cdot\frac{d^3w(x)}{dx^3}+E\frac{dI^2(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^2w(x)}{dx^2}-N\frac{d^2w(x)}{dx^2}-q(x)=0$$

căreia autorul nu a putut să-i găsească o soluţia generală sau un algoritm de calcul asociat.

Totuşi, în cazul particular:

$$I(x)=I_1e^{-\alpha\cdot x}$$

avem soluţia asigurată de algoritmul:

$$w(x)=C_0+C_1x+\int_1^x\left(\int_1^{\xi_1}\left\{e^{\alpha\xi_2}I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_2}\right)C_2+2e^{\alpha\xi_2}K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_2}\right)C_3+\right.\right.$$
$$+\frac{e^{\alpha\xi_2}}{\alpha EI_1}\left[I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_2}\right)\int_1^{\xi_2}q(\xi_3)K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_3}\right)d\xi_3-\right.$$
$$\left.\left.\left.-2K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_2}\right)\int_1^{\xi_2}q(\xi_3)I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_3}\right)d\xi_3\right]\right\}d\xi_2\right)d\xi_1$$

unde:

$$\kappa=\sqrt{\frac{N}{EI_1}}$$

Particularizând, în continuare, cu:

$$q(x)=q_0+q_1x$$

avem:

$$w(x)=C_0+C_1x+\int_1^x\left(\int_1^{\xi_1}\left\{e^{\alpha\xi_2}I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_2}\right)C_2+2e^{\alpha\xi_2}K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_2}\right)C_3+\right.\right.$$
$$+\frac{e^{\alpha\xi_2}}{\alpha EI_1}\left[I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_2}\right)\int_1^{\xi_2}(q_0+q_1\xi_3)K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_3}\right)d\xi_3-\right.$$
$$\left.\left.\left.-2K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_2}\right)\int_1^{\xi_2}(q_0+q_1\xi_3)I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_3}\right)d\xi_3\right]\right\}d\xi_2\right)d\xi_1$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x)=C_0+C_1x+\int_1^x\left(\int_1^{\xi_1}\left\{e^{\alpha\xi_2}I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_2}\right)C_2+2e^{\alpha\xi_2}K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_2}\right)C_3+\right.\right.$$
$$+\frac{q_1e^{\alpha\xi_2}}{\alpha EI_1}\left[I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_2}\right)\int_1^{\xi_2}\xi_3K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_3}\right)d\xi_3-\right.$$
$$\left.\left.\left.-2K_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_2}\right)\int_1^{\xi_2}\xi_3I_0\left(\frac{2\kappa}{\alpha}e^{\alpha\xi_3}\right)d\xi_3\right]\right\}d\xi_2\right)d\xi_1$$

Bară pe pat elastic, fără forţă axială, cu moment de inerţie constant şi sarcină distribuită constantă

Fiind date condiţiile:

$$k_p > 0 \qquad N = 0 \qquad I(x) = I_0 \qquad q(x) = q_0$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI_0\frac{d^4w(x)}{dx^4}-k_pw(x)-q_0=0$$

şi are soluţia generală:

$$w(x) = C_0\, sin(\kappa \cdot x) + C_1\, cos(\kappa \cdot x) + C_2 e^{\kappa \cdot x} + C_3 e^{-\kappa \cdot x} - \frac{q_0}{k_p}$$

unde:

$$\kappa = \sqrt[4]{\frac{k_p}{EI_0}}$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x) = C_0\, sin(\kappa \cdot x) + C_1\, cos(\kappa \cdot x) + C_2 e^{\kappa \cdot x} + C_3 e^{-\kappa \cdot x}$$

Evident, soluţiile anterioare pot fi rescrise înlocuind funcţiile exponenţiale $exp(\kappa x)$ şi $exp(-\kappa x)$ prin intermediul funcţiilor hiperbolice: $sh(\kappa x)$ şi $ch(\kappa x)$

Bară pe pat elastic, fără forţă axială, cu moment de inerţie constant şi sarcină distribuită variabilă

Fiind date condiţiile:

$k_p > 0$ $\qquad$ $N = 0$ $\qquad$ $I(x) = I_0$ $\qquad$ $q(x)$

ecuaţia (4) devine:

$$EI_0 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - k_p w(x) - q(x) = 0$$

şi are soluţia asigurată de algoritmul:

$$\begin{aligned} w(x) = {} & C_0\, sin(\kappa \cdot x) + C_1\, cos(\kappa \cdot x) + C_2 e^{\kappa \cdot x} + C_3 e^{-\kappa \cdot x} + \\ & + \frac{\kappa}{2k_p}\left[\frac{e^{\kappa \cdot x}}{2} \int_1^x e^{-\kappa \cdot \xi} q(\xi) d\xi - \frac{e^{-\kappa \cdot x}}{2} \int_1^x e^{\kappa \cdot \xi} q(\xi) d\xi + \right. \\ & \left. + cos(\kappa \cdot x) \int_1^x q(\xi) sin(\kappa \cdot \xi) d\xi - sin(\kappa \cdot x) \int_1^x q(\xi) cos(\kappa \cdot \xi) d\xi \right] \end{aligned}$$

unde:

$$\kappa = \sqrt[4]{\frac{k_p}{EI_0}}$$

În cazul particular:

$$q(x) = q_0 + q_1 x$$

avem:

$$w(x) = C_0\, sin(\kappa \cdot x) + C_1\, cos(\kappa \cdot x) + C_2 e^{\kappa \cdot x} + C_3 e^{-\kappa \cdot x} - \frac{q_0}{k_p} - \frac{q_1}{k_p} x$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x) = C_0\, sin(\kappa \cdot x) + C_1\, cos(\kappa \cdot x) + C_2 e^{\kappa \cdot x} + C_3 e^{-\kappa \cdot x} - \frac{q_1}{k_p} x$$

Evident, soluţiile anterioare pot fi rescrise înlocuind funcţiile exponenţiale $exp(\kappa x)$ şi $exp(-\kappa x)$ prin intermediul funcţiilor hiperbolice: $sh(\kappa x)$ şi $ch(\kappa x)$

Bară pe pat elastic, fără forţă axială, cu moment de inerţie variabil şi sarcină distribuită constantă

Fiind date condiţiile:

$k_p > 0$ $\qquad$ $N = 0$ $\qquad$ $I(x)$ $\qquad$ $q(x) = q_0$

ecuaţia (4) devine:

$$EI(x)\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 2E\frac{dI(x)}{dx} \cdot \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + E\frac{dI^2(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - k_p w(x) - q_0 = 0$$

căreia autorul nu a putut să-i găsească o soluţia generală sau un algoritm de calcul asociat.

Totuşi, în cazul particular:

$$I(x) = I_1 e^{-\alpha \cdot x} \quad \text{şi} \qquad q_0 = 0$$

avem soluţia asigurată de algoritmul:

$$w(x) = e^{\alpha \cdot x} k_p C_0 \cdot pFq\left(\{\ \}, \{1,2,2\}, \frac{e^{\alpha \cdot x} k_p}{\alpha^4 EI_1} \right) + C_1 \cdot G\left(\{\{\ \}, \{\ \}\}, \{\{1,1\}, \{0,0\}\}, \frac{e^{\alpha \cdot x} k_p}{\alpha^4 EI_1} \right)$$

$$C_2 \cdot G\left(\{\{\ \}, \{\ \}\}, \{\{0,1,1\}, \{0\}\}, -\frac{e^{\alpha \cdot x} k_p}{\alpha^4 EI_1} \right) + C_3 \cdot G\left(\{\{\ \}, \{\ \}\}, \{\{0,0,1,1\}, \{0\}\}, \frac{e^{\alpha \cdot x} k_p}{\alpha^4 EI_1} \right)$$

unde *pFq* este funcţia hipergeometrică generalizată:

$$pFq\left(\{a_1, \ldots, a_p\}, \{b_1, \ldots, b_p\}, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{(a_1)_k \ldots (a_p)_k}{(b_1)_k \ldots (b_p)_k}$$

iar *G* este funcţia Meijer, definită, pentru un umăr real oarecare, *r*:

$$G_{pq}^{mn}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) = \frac{r}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(1 - a_1 - rs) \ldots \Gamma(1 - a_n - rs) \Gamma(b_1 + rs) \ldots \Gamma(b_m + rs)}{\Gamma(a_{n+1} + rs) \ldots \Gamma(a_p + rs) \Gamma(1 - b_{m+1} - rs) \ldots \Gamma(1 - b_q - rs) z^{-s}} ds$$

Reamintim că funcţia $\Gamma(z)$ este definită:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

şi, pentru valori *n* întregi, poate fi privită ca o generalizare a funcţiei factorial pentru argumentul *z* complex:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \Gamma(z)$$

Bară pe pat elastic, fără forţă axială, cu moment de inerţie variabil şi sarcină distribuită variabilă

Fiind date condiţiile:

$k_p > 0$ $\qquad$ $N = 0$ $\qquad$ $I(x)$ $\qquad$ $q(x)$

ecuaţia (4) devine:

$$EI(x)\frac{d^4w(x)}{dx^4}+2E\frac{dI(x)}{dx}\cdot\frac{d^3w(x)}{dx^3}+E\frac{dI^2(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^2w(x)}{dx^2}-k_pw(x)-q(x)=0$$

căreia autorul nu a reuşit să-i găsească o soluţie generală sau un algoritm de calcul asociat. A se vedea şi cazul analizat anterior.

Bară pe pat elastic, forţă axială de compresie, cu moment de inerţie constant şi sarcină distribuită constantă

Fiind date condiţiile:

$$k_p > 0 \qquad N > 0 \qquad I(x) = I_0 \qquad q(x) = q_0$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI_0\frac{d^4w(x)}{dx^4}+N\frac{d^2w(x)}{dx^2}-k_pw(x)-q_0=0$$

şi are soluţia generală:

$$w(x)=-\frac{q_0}{k_p}+C_0\cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N-\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}+C_1\cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N-\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}+$$
$$+C_2\cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N+\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}+C_3\cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N+\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x)=C_0\cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N-\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}+C_1\cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N-\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}+$$
$$+C_2\cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N+\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}+C_3\cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N+\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}$$

Bară pe pat elastic, forţă axială de compresie, cu moment de inerţie constant şi sarcină distribuită variabilă

Fiind date condiţiile:

$$k_p > 0 \qquad N > 0 \qquad I(x) = I_0 \qquad q(x)$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI_0 \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + N \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - k_p w(x) - q(x) = 0$$

şi are soluţia asigurată de algoritmul:

$$w(x) = C_0 \cdot e^{\alpha \cdot x} + C_1 \cdot e^{-\alpha \cdot x} + C_2 \cdot e^{\beta \cdot x} + C_3 \cdot e^{-\beta \cdot x} +$$
$$+ \frac{\alpha}{4k_p}\left(1 - \frac{N}{\sqrt{N^2 + 4EI_0 k_p}}\right)\left(e^{\alpha \cdot x}\int_1^x e^{-\alpha \cdot \xi} q(\xi) d\xi - e^{-\alpha \cdot x}\int_1^x e^{\alpha \cdot \xi} q(\xi) d\xi\right) +$$
$$+ \frac{\beta}{4k_p}\left(1 + \frac{N}{\sqrt{N^2 + 4EI_0 k_p}}\right)\left(e^{\beta \cdot x}\int_1^x e^{-\beta \cdot \xi} q(\xi) d\xi - e^{-\beta \cdot x}\int_1^x e^{\beta \cdot \xi} q(\xi) d\xi\right)$$

unde:

$$\alpha = \sqrt{-\frac{1}{2EI_0}\left(N + \sqrt{N^2 + 4EI_0 k_p}\right)}$$

şi

$$\beta = \sqrt{-\frac{1}{2EI_0}\left(N - \sqrt{N^2 + 4EI_0 k_p}\right)}$$

În cazul particular:

$$q(x) = q_0 + q_1 x$$

avem:

$$w(x)=-\frac{q_0}{k_p}-\frac{q_1}{k_p}x+C_0\cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N-\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}+C_1\cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N-\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}+$$
$$+C_2\cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N+\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}+C_3\cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N+\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x)=-\frac{q_1}{k_p}x+C_0\cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N-\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}+C_1\cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N-\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}+$$
$$+C_2\cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N+\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}+C_3\cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(-N+\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}$$

Bară pe pat elastic, forţă axială de compresie, cu moment de inerţie variabil şi sarcină distribuită constantă

Fiind date condiţiile:

$$k_p > 0 \qquad N > 0 \qquad I(x) \qquad q(x) = q_0$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI(x)\frac{d^4w(x)}{dx^4}+2E\frac{dI(x)}{dx}\cdot\frac{d^3w(x)}{dx^3}+E\frac{dI^2(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^2w(x)}{dx^2}+N\frac{d^2w(x)}{dx^2}-k_pw(x)-q_0=0$$

căreia autorul nu a reuşit să-i găsească o soluţie generală sau un algoritm de calcul asociat.

Bară pe pat elastic, forţă axială de compresie, cu moment de inerţie variabil şi sarcină distribuită variabilă

Fiind date condiţiile:

$$k_p > 0 \qquad N > 0 \qquad I(x) \qquad q(x)$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI(x)\frac{d^4w(x)}{dx^4} + 2E\frac{dI(x)}{dx}\cdot\frac{d^3w(x)}{dx^3} + E\frac{dI^2(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^2w(x)}{dx^2} + N\frac{d^2w(x)}{dx^2} - k_p w(x) - q(x) = 0$$

căreia autorul nu a reuşit să-i găsească o soluţie generală sau un algoritm de calcul asociat.

Bară pe pat elastic, forţă axială de întindere, cu moment de inerţie constant şi sarcină distribuită constantă

Fiind date condiţiile:

$$k_p > 0 \qquad N < 0 \qquad I(x) = I_0 \qquad q(x) = q_0$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI_0\frac{d^4w(x)}{dx^4} - N\frac{d^2w(x)}{dx^2} - k_p w(x) - q_0 = 0$$

şi are soluţia generală:

$$w(x) = -\frac{q_0}{k_p} + C_0\cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N-\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x} + C_1\cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N-\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x} +$$
$$+ C_2\cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N+\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x} + C_3\cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N+\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x) = C_0 \cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N-\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x} + C_1 \cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N-\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x} +$$
$$+ C_2 \cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N+\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x} + C_3 \cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N+\sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}$$

Bară pe pat elastic, forţă axială de întindere, cu moment de inerţie constant şi sarcină distribuită variabilă

Fiind date condiţiile:

$$k_p > 0 \qquad N < 0 \qquad I(x) = I_0 \qquad q(x)$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI_0 \frac{d^4w(x)}{dx^4} - N\frac{d^2w(x)}{dx^2} - k_p w(x) - q(x) = 0$$

şi are soluţia asigurată de algoritmul:

$$w(x) = C_0 \cdot e^{\alpha \cdot x} + C_1 \cdot e^{-\alpha \cdot x} + C_2 \cdot e^{\beta \cdot x} + C_3 \cdot e^{-\beta \cdot x} +$$
$$+ \frac{\alpha}{4k_p}\left(1 - \frac{N}{\sqrt{N^2+4EI_0k_p}}\right)\left(e^{\alpha \cdot x}\int_1^x e^{-\alpha \cdot \xi} q(\xi)d\xi - e^{-\alpha \cdot x}\int_1^x e^{\alpha \cdot \xi} q(\xi)d\xi\right) +$$
$$+ \frac{\beta}{4k_p}\left(1 - \frac{N}{\sqrt{N^2+4EI_0k_p}}\right)\left(e^{\beta \cdot x}\int_1^x e^{-\beta \cdot \xi} q(\xi)d\xi - e^{-\beta \cdot x}\int_1^x e^{\beta \cdot \xi} q(\xi)d\xi\right)$$

unde:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N - \sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}$$

şi

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N + \sqrt{N^2 + 4EI_0 k_p}\right)}$$

În cazul particular:

$$q(x) = q_0 + q_1 x$$

avem:

$$w(x) = -\frac{q_0}{k_p} - \frac{q_1}{k_p}x + C_0 \cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N - \sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x} + C_1 \cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N - \sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x} +$$
$$+ C_2 \cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N + \sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x} + C_3 \cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N + \sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}$$

Dacă $q_0 = 0$, atunci:

$$w(x) = -\frac{q_1}{k_p}x + C_0 \cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N - \sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x} + C_1 \cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N - \sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x} +$$
$$+ C_2 \cdot e^{\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N + \sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x} + C_3 \cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI_0}\left(N + \sqrt{N^2+4EI_0k_p}\right)}x}$$

Bară pe pat elastic, forţă axială de întindere, cu moment de inerţie variabil şi sarcină distribuită constantă

Fiind date condiţiile:

$$k_p > 0 \qquad N < 0 \qquad I(x); \qquad q(x) = q_0$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI(x)\frac{d^4w(x)}{dx^4} + 2E\frac{dI(x)}{dx}\cdot\frac{d^3w(x)}{dx^3} + E\frac{dI^2(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^2w(x)}{dx^2} - N\frac{d^2w(x)}{dx^2} - k_p w(x) - q_0 = 0$$

căreia autorul nu a reuşit să-i găsească o soluţie generală sau un algoritm de calcul asociat.

Bară pe pat elastic, forţă axială de întindere, cu moment de inerţie variabil şi sarcină distribuită variabilă

Fiind date condiţiile:

$$k_p > 0 \qquad N < 0 \qquad I(x) \qquad q(x)$$

ecuaţia (4) devine:

$$EI(x)\frac{d^4w(x)}{dx^4} + 2E\frac{dI(x)}{dx}\cdot\frac{d^3w(x)}{dx^3} + E\frac{dI^2(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^2w(x)}{dx^2} - N\frac{d^2w(x)}{dx^2} - k_p w(x) - q(x) = 0$$

căreia autorul nu a reuşit să-i găsească o soluţie generală sau un algoritm de calcul asociat.

EVALUĂRI NUMERICE

Aşa cum s-a văzut în capitolul anterior, din cele 36 de situaţii teoretice de solicitare a unei bare omogene şi drepte, s-a reuşit indicarea unei soluţii generale, sau a uneia particulare, sau numai a unui algoritm de rezolvare pentru 31 de ecuaţii.

Pentru fiecare exemplu în parte, cele patru constante de integrare: C_0, C_1, C_2 şi C_3 urmează să fie determinate funcţie condiţiile de sprijinire la capetele barei, şi / sau în reazeme intermediare.

Rezultă că obţinerea, în final, a unor formule analitice complete rămâne dezideratul oricărui cercetător în domeniu. Măcar şi pentru frumuseţea lor intrinsecă.

General vorbind, în cazul încovoierii unei bare cu N reazeme, evaluarea celor $4(N-1)$ constante de integrare: C_{i0}, C_{i1}, C_{i2} şi C_{i3} (discutate şi în capitolul precedent) reclamă, cu deosebire pentru valori mari ale lui N, folosirea tehnicii de calcul electronic şi a unor produse software adecvate.

Mai mult, dacă programele de calcul utilizate au fost gândite şi dezvoltate să răspundă unor cerinţe aplicative imediate, *rezultatele* obţinute vor fi, cu siguranţă, mai ales *sub formă numerică* şi / sau *grafică*.

Metoda parametrilor în origine

Totuşi, atunci când bara studiată nu are reazeme intermediare „consacrate” (reazem simplu rigid, reazem simplu elastic, sau articulaţie intermediară), dar este supusă acţiunii unor eforturi externe concentrate şi / sau prezintă

variaţii bruşte ale sarcinii distribuite, fibra deformată poate fi descrisă şi cu ajutorul *formulei analitice*:

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x - \frac{M_0}{EI}\cdot\frac{x^2}{2!} - \frac{T_0}{EI}\cdot\frac{x^3}{3!} - \sum_i \frac{M_i}{EI}\cdot\frac{\langle x-a_i\rangle^2}{2!} + \\ + \sum_j \frac{F_j}{EI}\cdot\frac{\langle x-b_i\rangle^3}{3!} + \sum_k \frac{q_k}{EI}\cdot\left(\frac{\langle x-c_k\rangle^4}{4!} - \frac{\langle x-d_k\rangle^4}{4!}\right)$$

unde:

- rigiditatea *EI* este constantă pe toată lungimea barei;
- parametrii w_0, θ_0, M_0 şi T_0 reprezintă *valorile cunoscute* ale săgeţii, rotirii, momentului încovoietor şi forţei de forfecare în capătul (barei) de abscisă $x = 0$;
- *prin definiţie*, parantezele $\langle x-\xi\rangle$ sunt întotdeauna *nule* dacă $x < \xi$, ele evaluându-se cu formula de calcul:

$$\langle x-\xi\rangle = \frac{|x-\xi| + x - \xi}{2}$$

- valorile a_i şi b_j sunt abscisele punctelor de aplicaţie ale eforturilor externe M_i şi F_j, în timp ce dubletul de ordonate (c_k, d_k) desemnează segmentul de bară pe care acţionează sarcina distribuită q_k constantă.

Evaluări numerice

În vederea evaluării numerice a constantelor de integrare *C* (necunoscute), se rezolvă sistemul de ecuaţii liniare:

$$\|a\| \cdot \{C\} = \{b\}$$

matricea $\|a\|$ şi vectorul $\{b\}$ construindu-se cu ajutorul parametrilor cunoscuţi: `E` = modul de elasticitate, `I` = moment de inerţie, `N` = forţă axială,

`q` = sarcină distribuită, `Nr` = număr reazeme, `tr` = tip reazem, `ke` = constantă reazem elastic, `ce` = constantă încastrare elastică.

Un posibil algoritm ar fi cel implementat în corpul următoarei proceduri de calcul, scrisă în limbaj de programare Borland Pascal (Delphi):

```
procedure matrici;
var i,j,k:integer;
begin
 kb:=sqrt(abs(N)/E/I);
 for i:=1 to 4*(nr-1) do for j:=1 to 4*(nr-1) do a[i,j]:=0;
 for i:=1 to 4*(nr-1) do b[i]:=0;
 j:=0;
 k:=0;
 if N<0 then
  for i:=1 to Nr do
  begin
   if i>1 then k:=1;
   case tr[i] of
    0:begin {capat liber}
       a[j+2*k+1,j+1]:=power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+2]:=power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+3]:=0;
       a[j+2*k+1,j+4]:=0;
       b[j+2*k+1]:=q/N;
       a[j+2*k+2,j+1]:=power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+2]:=power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+3]:=0;
       a[j+2*k+2,j+4]:=0;
       b[j+2*k+2]:=0;
      end;
    1:begin {simplu rigid}
       a[j+2*k+1,j+1]:=sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+2]:=cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
       a[j+2*k+1,j+4]:=1;
       b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],2)/2/N;
       a[j+2*k+2,j+1]:=power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+2]:=power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+3]:=0;
       a[j+2*k+2,j+4]:=0;
       b[j+2*k+2]:=q/N;
      end;
    2:begin {simplu elastic}
       a[j+2*k+1,j+1]:=power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+2]:=power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+3]:=0;
```

```
      a[j+2*k+1,j+4]:=0;
      b[j+2*k+1]:=q/N;
      a[j+2*k+2,j+1]:=power(kb,3)*E*I*cosh(kb*x[i])
                      +ke[i]*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+2,j+2]:=power(kb,3)*E*I*sinh(kb*x[i])
                      +ke[i]*cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+2,j+3]:=ke[i]*x[i];
      a[j+2*k+2,j+4]:=ke[i];
      b[j+2*k+2]:=-ke[i]*q*power(x[i],2)/2/N;
    end;
  3:begin {incastrare rigida}
      a[j+2*k+1,j+1]:=sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+1,j+2]:=cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
      a[j+2*k+1,j+4]:=1;
      b[j+2*k+1]:=-q*x[i]*x[i]/2/N;
      a[j+2*k+2,j+1]:=kb*cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+2,j+2]:=kb*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+2,j+3]:=1;
      a[j+2*k+2,j+4]:=0;
      b[j+2*k+2]:=-q*x[i]/N;
    end;
  4:begin {incastrare elastica}
      a[j+2*k+1,j+1]:=sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+1,j+2]:=cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
      a[j+2*k+1,j+4]:=1;
      b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],2)/2/N;
      a[j+2*k+2,j+1]:=power(kb,3)*E*I*sinh(kb*x[i])
                      -ce[i]*kb*cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+2,j+2]:=power(kb,3)*E*I*cosh(kb*x[i])
                      -ce[i]*kb*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+2,j+3]:=-ce[i];
      a[j+2*k+2,j+4]:=0;
      b[j+2*k+2]:=q*ce[i]*x[i]/N-E*I*q/N;
    end;
  5:begin {rezemare generala}
      a[j+2*k+1,j+1]:=power(kb,3)*E*I*sinh(kb*x[i])
                     -ce[i]*kb*cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+1,j+2]:=power(kb,3)*E*I*cosh(kb*x[i])
                     -ce[i]*kb*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+1,j+3]:=-ce[i];
      a[j+2*k+1,j+4]:=0;
      b[j+2*k+1]:=q*ce[i]*x[i]/N-E*I*q/N;
      a[j+2*k+2,j+1]:=power(kb,3)*E*I*cosh(kb*x[i])
                      +ke[i]*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+2,j+2]:=power(kb,3)*E*I*sinh(kb*x[i])
       +ke[i]*cosh(kb*x[i]);
```

```
    a[j+2*k+2,j+3]:=ke[i]*x[i];
    a[j+2*k+2,j+4]:=ke[i];
    b[j+2*k+2]:=-ke[i]*q*power(x[i],2)/2/N;
   end;
 6:begin {forta in capat liber}
    a[j+2*k+1,j+1]:=power(kb,2)*sinh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+2]:=power(kb,2)*cosh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+3]:=0;
    a[j+2*k+1,j+4]:=0;
    b[j+2*k+1]:=-q/N;
    a[j+2*k+2,j+1]:=power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+2]:=power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+3]:=0;
    a[j+2*k+2,j+4]:=0;
    b[j+2*k+2]:=-fc[i]/E/I;
   end;
 7:begin {forta in resort elastic}
    a[j+2*k+1,j+1]:=power(kb,2)*sinh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+2]:=power(kb,2)*cosh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+3]:=0;
    a[j+2*k+1,j+4]:=0;
    b[j+2*k+1]:=-q/N;
    a[j+2*k+2,j+1]:=ke[i]/E/I*sinh(kb*x[i])
                    +power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+2]:=ke[i]/E/I*cosh(kb*x[i])
                    +power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+3]:=ke[i]*x[i]/E/I;
    a[j+2*k+2,j+4]:=ke[i]/E/I;
    b[j+2*k+2]:=fc[i]/E/I
                -q*ke[i]*power(x[i],2)/2/E/I/N;
   end;
 8:begin {simplu rigid intermediar}
    a[j+2*k+1,j+1]:=sinh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+2]:=cosh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
    a[j+2*k+1,j+4]:=1;
    b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],2)/2/N;
    a[j+2*k+2,j+5]:=sinh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+6]:=cosh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+7]:=x[i];
    a[j+2*k+2,j+8]:=1;
    b[j+2*k+2]:=-q*power(x[i],2)/2/N;
    a[j+2*k+3,j+1]:=kb*cosh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+3,j+2]:=kb*sinh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+3,j+3]:=1;
    a[j+2*k+3,j+4]:=0;
    a[j+2*k+3,j+5]:=-kb*cosh(kb*x[i]);
    a[j+2*k+3,j+6]:=-kb*sinh(kb*x[i]);
```

```
      a[j+2*k+3,j+7]:=-1;
      a[j+2*k+3,j+8]:=0;
      b[j+2*k+3]:=0;
      a[j+2*k+4,j+1]:=power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+4,j+2]:=power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+4,j+3]:=0;
      a[j+2*k+4,j+4]:=0;
      a[j+2*k+4,j+5]:=-power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+4,j+6]:=-power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+4,j+7]:=0;
      a[j+2*k+4,j+8]:=0;
      b[j+2*k+4]:=0;
      j:=4*(i-1);
    end;
  9:begin {simplu elastic intermediar}
      a[j+2*k+1,j+1]:=E*I*power(kb,3)*cosh(kb*x[i])
                      +ke[i]*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+1,j+2]:=E*I*power(kb,3)*sinh(kb*x[i])
                      +ke[i]*cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+1,j+3]:=ke[i]*x[i];
      a[j+2*k+1,j+4]:=ke[i];
      b[j+2*k+1]:=-ke[i]*q*power(x[i],2)/2/N;
      a[j+2*k+2,j+5]:=E*I*power(kb,3)*cosh(kb*x[i])
                      +ke[i]*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+2,j+6]:=E*I*power(kb,3)*sinh(kb*x[i])
                      +ke[i]*cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+2,j+7]:=ke[i]*x[i];
      a[j+2*k+2,j+8]:=ke[i];
      b[j+2*k+2]:=-ke[i]*q*power(x[i],2)/2/N;
      a[j+2*k+3,j+1]:=kb*cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+3,j+2]:=kb*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+3,j+3]:=1;
      a[j+2*k+3,j+4]:=0;
      a[j+2*k+3,j+5]:=-kb*cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+3,j+6]:=-kb*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+3,j+7]:=-1;
      a[j+2*k+3,j+8]:=0;
      b[j+2*k+3]:=0;
      a[j+2*k+4,j+1]:=power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+4,j+2]:=power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+4,j+3]:=0;
      a[j+2*k+4,j+4]:=0;
      a[j+2*k+4,j+5]:=-power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+4,j+6]:=-power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
      a[j+2*k+4,j+7]:=0;
      a[j+2*k+4,j+8]:=0;
      b[j+2*k+4]:=0;
      j:=4*(i-1);
```

```
      end;
   10:begin {forta concentrata intermediar}
       a[j+2*k+1,j+1]:=sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+2]:=cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
       a[j+2*k+1,j+4]:=1;
       a[j+2*k+1,j+5]:=-sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+6]:=-cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+7]:=-x[i];
       a[j+2*k+1,j+8]:=-1;
       b[j+2*k+1]:=0;
       a[j+2*k+2,j+1]:=kb*cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+2]:=kb*sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+3]:=1;
       a[j+2*k+2,j+4]:=0;
       a[j+2*k+2,j+5]:=-kb*cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+6]:=-kb*sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+7]:=-1;
       a[j+2*k+2,j+8]:=0;
       b[j+2*k+2]:=0;
       a[j+2*k+3,j+1]:=power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+3,j+2]:=power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+3,j+3]:=0;
       a[j+2*k+3,j+4]:=0;
       a[j+2*k+3,j+5]:=-power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+3,j+6]:=-power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+3,j+7]:=-0;
       a[j+2*k+3,j+8]:=0;
       b[j+2*k+3]:=0;
       a[j+2*k+4,j+1]:=power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+4,j+2]:=power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+4,j+3]:=0;
       a[j+2*k+4,j+4]:=0;
       a[j+2*k+4,j+5]:=power(kb,3)*cosh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+4,j+6]:=power(kb,3)*sinh(kb*x[i]);
       a[j+2*k+4,j+7]:=0;
       a[j+2*k+4,j+8]:=0;
       b[j+2*k+4]:=-fc[i]/E/I;
       j:=4*(i-1);
      end;
  end;
 end;
if N=0 then
 for i:=1 to Nr do
 begin
  if i>1 then k:=1;
  case tr[i] of
   0:begin {capat liber}
```

```
      a[j+2*k+1,j+1]:=x[i];
      a[j+2*k+1,j+2]:=1;
      a[j+2*k+1,j+3]:=0;
      a[j+2*k+1,j+4]:=0;
      b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],2)/2/E/I;
      a[j+2*k+2,j+1]:=1;
      a[j+2*k+2,j+2]:=0;
      a[j+2*k+2,j+3]:=0;
      a[j+2*k+2,j+4]:=0;
      b[j+2*k+2]:=-q*x[i]/E/I;
    end;
  1:begin {simplu rigid}
      a[j+2*k+1,j+1]:=power(x[i],3)/6;
      a[j+2*k+1,j+2]:=x[i]*x[i]/2;
      a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
      a[j+2*k+1,j+4]:=1;
      b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],4)/24/E/I;
      a[j+2*k+2,j+1]:=x[i];
      a[j+2*k+2,j+2]:=1;
      a[j+2*k+2,j+3]:=0;
      a[j+2*k+2,j+4]:=0;
      b[j+2*k+2]:=-q*power(x[i],2)/2/E/I;
    end;
  2:begin {simplu elastic}
      a[j+2*k+1,j+1]:=x[i];
      a[j+2*k+1,j+2]:=1;
      a[j+2*k+1,j+3]:=0;
      a[j+2*k+1,j+4]:=0;
      b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],2)/2/E/I;
      a[j+2*k+2,j+1]:=ke[i]*power(x[i],3)/6+E*I;
      a[j+2*k+2,j+2]:=ke[i]*power(x[i],2)/2;
      a[j+2*k+2,j+3]:=ke[i]*x[i];
      a[j+2*k+2,j+4]:=ke[i];
      b[j+2*k+2]:=-q*x[i]-ke[i]*q*power(x[i],4)/24/E/I;
    end;
  3:begin {incastrare rigida}
      a[j+2*k+1,j+1]:=power(x[i],3)/6;
      a[j+2*k+1,j+2]:=power(x[i],2)/2;
      a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
      a[j+2*k+1,j+4]:=1;
      b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],4)/24/E/I;
      a[j+2*k+2,j+1]:=power(x[i],2)/2;
      a[j+2*k+2,j+2]:=x[i];
      a[j+2*k+2,j+3]:=1;
      a[j+2*k+2,j+4]:=0;
      b[j+2*k+2]:=-q*power(x[i],3)/6/E/I;
    end;
  4:begin {inacstrare elastica}
```

```
   a[j+2*k+1,j+1]:=power(x[i],3)/6;
   a[j+2*k+1,j+2]:=power(x[i],2)/2;
   a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
   a[j+2*k+1,j+4]:=1;
   b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],4)/24/E/I;
   a[j+2*k+2,j+1]:=E*I*x[i]-ce[i]*power(x[i],2)/2;
   a[j+2*k+2,j+2]:=E*I-ce[i]*x[i];
   a[j+2*k+2,j+3]:=-ce[i];
   a[j+2*k+2,j+4]:=0;
   b[j+2*k+2]:=q*ce[i]*power(x[i],3)/6/E/I
              -q*power(x[i],2)/2;
  end;
5:begin {rezemare generala}
   a[j+2*k+1,j+1]:=E*I*x[i]-ce[i]*power(x[i],2)/2;
   a[j+2*k+1,j+2]:=E*I-ce[i]*x[i];
   a[j+2*k+1,j+3]:=-ce[i];
   a[j+2*k+1,j+4]:=0;
   b[j+2*k+1]:=q*ce[i]*power(x[i],3)/6/E/I
              -q*power(x[i],2)/2;
   a[j+2*k+2,j+1]:=ke[i]*power(x[i],3)/6+E*I;
   a[j+2*k+2,j+2]:=ke[i]*power(x[i],2)/2;
   a[j+2*k+2,j+3]:=ke[i]*x[i];
   a[j+2*k+2,j+4]:=ke[i];
   b[j+2*k+2]:=q*x[i]-q*ke[i]*power(x[i],4)/24/E/I;
  end;
6:begin {forta in capat liber}
   a[j+2*k+1,j+1]:=1;
   a[j+2*k+1,j+2]:=0;
   a[j+2*k+1,j+3]:=0;
   a[j+2*k+1,j+4]:=0;
   b[j+2*k+1]:=-fc[i]/E/I-q*x[i]/E/I;
   a[j+2*k+2,j+1]:=x[i];
   a[j+2*k+2,j+2]:=1;
   a[j+2*k+2,j+3]:=0;
   a[j+2*k+2,j+4]:=0;
   b[j+2*k+2]:=-q*power(x[i],2)/2/E/I;
  end;
7:begin {forta in resort elastic}
   a[j+2*k+1,j+1]:=x[i];
   a[j+2*k+1,j+2]:=1;
   a[j+2*k+1,j+3]:=0;
   a[j+2*k+1,j+4]:=0;
   b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],2)/2/E/I;
   a[j+2*k+2,j+1]:=1+ke[i]*power(x[i],3)/6/E/I;
   a[j+2*k+2,j+2]:=ke[i]*power(x[i],2)/2/E/I;
   a[j+2*k+2,j+3]:=ke[i]*x[i]/E/I;
   a[j+2*k+2,j+4]:=ke[i]/E/I;
   b[j+2*k+2]:=fc[i]/E/I
```

```
                -q*ke[i]*power(x[i],4)/24/E/E/I/I
                -q*x[i]/E/I;
    end;
  8:begin {simplu rigid intermediar}
     a[j+2*k+1,j+1]:=power(x[i],3)/6;
     a[j+2*k+1,j+2]:=power(x[i],2)/2;
     a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
     a[j+2*k+1,j+4]:=1;
     b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],4)/24/E/I;
     a[j+2*k+2,j+5]:=power(x[i],3)/6;
     a[j+2*k+2,j+6]:=power(x[i],2)/2;
     a[j+2*k+2,j+7]:=x[i];
     a[j+2*k+2,j+8]:=1;
     b[j+2*k+2]:=-q*power(x[i],4)/24/E/I;
     a[j+2*k+3,j+1]:=power(x[i],2)/2;
     a[j+2*k+3,j+2]:=x[i];
     a[j+2*k+3,j+3]:=1;
     a[j+2*k+3,j+4]:=0;
     a[j+2*k+3,j+5]:=-power(x[i],2)/2;
     a[j+2*k+3,j+6]:=-x[i];
     a[j+2*k+3,j+7]:=-1;
     a[j+2*k+3,j+8]:=0;
     b[j+2*k+3]:=0;
     a[j+2*k+4,j+1]:=x[i];
     a[j+2*k+4,j+2]:=1;
     a[j+2*k+4,j+3]:=0;
     a[j+2*k+4,j+4]:=0;
     a[j+2*k+4,j+5]:=-x[i];
     a[j+2*k+4,j+6]:=-1;
     a[j+2*k+4,j+7]:=0;
     a[j+2*k+4,j+8]:=0;
     b[j+2*k+4]:=0;
     j:=4*(i-1);
    end;
  9:begin {simplu elastic intermediar}
     a[j+2*k+1,j+1]:=E*I+ke[i]*power(x[i],3)/6;
     a[j+2*k+1,j+2]:=ke[i]*power(x[i],2)/2;
     a[j+2*k+1,j+3]:=ke[i]*x[i];
     a[j+2*k+1,j+4]:=ke[i];
     b[j+2*k+1]:=-ke[i]*q*power(x[i],4)/24/E/I-q*x[i];
     a[j+2*k+2,j+5]:=E*I+ke[i]*power(x[i],3)/6;
     a[j+2*k+2,j+6]:=ke[i]*power(x[i],2)/2;
     a[j+2*k+2,j+7]:=ke[i]*x[i];
     a[j+2*k+2,j+8]:=ke[i];
     b[j+2*k+2]:=-ke[i]*q*power(x[i],4)/24/E/I-q*x[i];
     a[j+2*k+3,j+1]:=power(x[i],2)/2;
     a[j+2*k+3,j+2]:=x[i];
     a[j+2*k+3,j+3]:=1;
```

```
      a[j+2*k+3,j+4]:=0;
      a[j+2*k+3,j+5]:=-power(x[i],2)/2;
      a[j+2*k+3,j+6]:=-x[i];
      a[j+2*k+3,j+7]:=-1;
      a[j+2*k+3,j+8]:=0;
      b[j+2*k+3]:=0;
      a[j+2*k+4,j+1]:=x[i];
      a[j+2*k+4,j+2]:=1;
      a[j+2*k+4,j+3]:=0;
      a[j+2*k+4,j+4]:=0;
      a[j+2*k+4,j+5]:=-x[i];
      a[j+2*k+4,j+6]:=-1;
      a[j+2*k+4,j+7]:=0;
      a[j+2*k+4,j+8]:=0;
      b[j+2*k+4]:=0;
      j:=4*(i-1);
    end;
 10:begin {forta concentrata intermediar}
      a[j+2*k+1,j+1]:=power(x[i],3)/6;
      a[j+2*k+1,j+2]:=power(x[i],2)/2;
      a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
      a[j+2*k+1,j+4]:=1;
      a[j+2*k+1,j+5]:=-power(x[i],3)/6;
      a[j+2*k+1,j+6]:=-power(x[i],2)/2;
      a[j+2*k+1,j+7]:=-x[i];
      a[j+2*k+1,j+8]:=-1;
      b[j+2*k+1]:=0;
      a[j+2*k+2,j+1]:=power(x[i],2)/2;
      a[j+2*k+2,j+2]:=x[i];
      a[j+2*k+2,j+3]:=1;
      a[j+2*k+2,j+4]:=0;
      a[j+2*k+2,j+5]:=-power(x[i],2)/2;
      a[j+2*k+2,j+6]:=-x[i];
      a[j+2*k+2,j+7]:=-1;
      a[j+2*k+2,j+8]:=0;
      b[j+2*k+2]:=0;
      a[j+2*k+3,j+1]:=x[i];
      a[j+2*k+3,j+2]:=1;
      a[j+2*k+3,j+3]:=0;
      a[j+2*k+3,j+4]:=0;
      a[j+2*k+3,j+5]:=-x[i];
      a[j+2*k+3,j+6]:=-1;
      a[j+2*k+3,j+7]:=0;
      a[j+2*k+3,j+8]:=0;
      b[j+2*k+3]:=0;
      a[j+2*k+4,j+1]:=1;
      a[j+2*k+4,j+2]:=0;
      a[j+2*k+4,j+3]:=0;
```

```
       a[j+2*k+4,j+4]:=0;
       a[j+2*k+4,j+5]:=-1;
       a[j+2*k+4,j+6]:=0;
       a[j+2*k+4,j+7]:=0;
       a[j+2*k+4,j+8]:=0;
       b[j+2*k+4]:=-fc[i]/E/I;
       j:=4*(i-1);
      end;
   end;
  end;
 if N>0 then
  for i:=1 to Nr do
  begin
   if i>1 then k:=1;
   case t[i] of
    0:begin {capat liber}
       a[j+2*k+1,j+1]:=power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+2]:=power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+3]:=0;
       a[j+2*k+1,j+4]:=0;
       b[j+2*k+1]:=q/N;
       a[j+2*k+2,j+1]:=-power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+2]:=power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+3]:=0;
       a[j+2*k+2,j+4]:=0;
       b[j+2*k+2]:=0;
      end;
    1:begin {simplu rigid}
       a[j+2*k+1,j+1]:=sin(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+2]:=cos(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
       a[j+2*k+1,j+4]:=1;
       b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],2)/2/N;
       a[j+2*k+2,j+1]:=power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+2]:=power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+3]:=0;
       a[j+2*k+2,j+4]:=0;
       b[j+2*k+2]:=q/N;
      end;
    2:begin {simplu elastic}
       a[j+2*k+1,j+1]:=power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+2]:=power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
       a[j+2*k+1,j+3]:=0;
       a[j+2*k+1,j+4]:=0;
       b[j+2*k+1]:=q/N;
       a[j+2*k+2,j+1]:=-power(kb,3)*E*I*cos(kb*x[i])
                       +ke[i]*sin(kb*x[i]);
       a[j+2*k+2,j+2]:=power(kb,3)*E*I*sin(kb*x[i])
```

```
                    +ke[i]*cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+3]:=ke[i]*x[i];
    a[j+2*k+2,j+4]:=ke[i];
    b[j+2*k+2]:=-ke[i]*q*power(x[i],2)/2/N;
   end;
 3:begin {incastrare rigida}
    a[j+2*k+1,j+1]:=sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+2]:=cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
    a[j+2*k+1,j+4]:=1;
    b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],2)/2/N;
    a[j+2*k+2,j+1]:=kb*cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+2]:=-kb*sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+3]:=1;
    a[j+2*k+2,j+4]:=0;
    b[j+2*k+2]:=-q*x[i]/N;
   end;
 4:begin {inacstrare elastica}
    a[j+2*k+1,j+1]:=sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+2]:=cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
    a[j+2*k+1,j+4]:=1;
    b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],2)/2/N;
    a[j+2*k+2,j+1]:=-power(kb,3)*E*I*sin(kb*x[i])
                    -ce[i]*kb*cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+2]:=-power(kb,3)*E*I*cos(kb*x[i])
                    +ce[i]*kb*sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+3]:=-ce[i];
    a[j+2*k+2,j+4]:=0;
    b[j+2*k+2]:=q*ce[i]*x[i]/N-E*I*q/N;
   end;
 5:begin {rezemare generala}
    a[j+2*k+1,j+1]:=-power(kb,3)*E*I*sin(kb*x[i])
                    -ce[i]*kb*cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+2]:=-power(kb,3)*E*I*cos(kb*x[i])
                    +ce[i]*kb*sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+3]:=-ce[i];
    a[j+2*k+1,j+4]:=0;
    b[j+2*k+1]:=q*ce[i]*x[i]/N-E*I*q/N;
    a[j+2*k+2,j+1]:=-power(kb,3)*E*I*cos(kb*x[i])
                    +ke[i]*sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+2]:=power(kb,3)*E*I*sin(kb*x[i])
                    +ke[i]*cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+3]:=ke[i]*x[i];
    a[j+2*k+2,j+4]:=ke[i];
    b[j+2*k+2]:=-ke[i]*q*x[i]*x[i]/2/N;
   end;
 6:begin {forta in capat liber}
```

```
    a[j+2*k+1,j+1]:=power(kb,2)*sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+2]:=power(kb,2)*cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+3]:=0;
    a[j+2*k+1,j+4]:=0;
    b[j+2*k+1]:=q/N;
    a[j+2*k+2,j+1]:=-power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+2]:=power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+3]:=0;
    a[j+2*k+2,j+4]:=0;
    b[j+2*k+2]:=-fc[i]/E/I;
  end;
7:begin {forta in resort elastic}
    a[j+2*k+1,j+1]:=power(kb,2)*sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+2]:=power(kb,2)*cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+3]:=0;
    a[j+2*k+1,j+4]:=0;
    b[j+2*k+1]:=q/N;
    a[j+2*k+2,j+1]:=ke[i]/E/I*sin(kb*x[i])
                    -power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+2]:=ke[i]/E/I*cos(kb*x[i])
                    +power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+3]:=ke[i]*x[i]/E/I;
    a[j+2*k+2,j+4]:=ke[i]/E/I;
    b[j+2*k+2]:=fc[i]/E/I
                -q*ke[i]*power(x[i],2)/2/E/I/N;
  end;
8:begin {simplu rigid intermediar}
    a[j+2*k+1,j+1]:=sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+2]:=cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
    a[j+2*k+1,j+4]:=1;
    b[j+2*k+1]:=-q*power(x[i],2)/2/N;
    a[j+2*k+2,j+5]:=sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+6]:=cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+2,j+7]:=x[i];
    a[j+2*k+2,j+8]:=1;
    b[j+2*k+2]:=-q*power(x[i],2)/2/N;
    a[j+2*k+3,j+1]:=kb*cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+3,j+2]:=-kb*sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+3,j+3]:=1;
    a[j+2*k+3,j+4]:=0;
    a[j+2*k+3,j+5]:=-kb*cos(kb*x[i]);
    a[j+2*k+3,j+6]:=kb*sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+3,j+7]:=-1;
    a[j+2*k+3,j+8]:=0;
    b[j+2*k+3]:=0;
    a[j+2*k+4,j+1]:=-power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
    a[j+2*k+4,j+2]:=-power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
```

```
     a[j+2*k+4,j+3]:=0;
     a[j+2*k+4,j+4]:=0;
     a[j+2*k+4,j+5]:=power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
     a[j+2*k+4,j+6]:=power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
     a[j+2*k+4,j+7]:=0;
     a[j+2*k+4,j+8]:=0;
     b[j+2*k+4]:=0;
     j:=4*(i-1);
    end;
 9:begin {simplu elastic intermediar}
     a[j+2*k+1,j+1]:=-E*I*power(kb,3)*cos(kb*x[i])
                     +ke[i]*sin(kb*x[i]);
     a[j+2*k+1,j+2]:=E*I*power(kb,3)*sin(kb*x[i])
                     +ke[i]*cos(kb*x[i]);
     a[j+2*k+1,j+3]:=ke[i]*x[i];
     a[j+2*k+1,j+4]:=ke[i];
     b[j+2*k+1]:=-ke[i]*q*power(x[i],2)/2/N;
     a[j+2*k+2,j+5]:=-E*I*power(kb,3)*cos(kb*x[i])
                     +ke[i]*sin(kb*x[i]);
     a[j+2*k+2,j+6]:=E*I*power(kb,3)*sin(kb*x[i])
                     +ke[i]*cos(kb*x[i]);
     a[j+2*k+2,j+7]:=ke[i]*x[i];
     a[j+2*k+2,j+8]:=ke[i];
     b[j+2*k+2]:=-ke[i]*q*power(x[i],2)/2/N;
     a[j+2*k+3,j+1]:=kb*cos(kb*x[i]);
     a[j+2*k+3,j+2]:=-kb*sin(kb*x[i]);
     a[j+2*k+3,j+3]:=1;
     a[j+2*k+3,j+4]:=0;
     a[j+2*k+3,j+5]:=-kb*cos(kb*x[i]);
     a[j+2*k+3,j+6]:=kb*sin(kb*x[i]);
     a[j+2*k+3,j+7]:=-1;
     a[j+2*k+3,j+8]:=0;
     b[j+2*k+3]:=0;
     a[j+2*k+4,j+1]:=-power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
     a[j+2*k+4,j+2]:=-power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
     a[j+2*k+4,j+3]:=0;
     a[j+2*k+4,j+4]:=0;
     a[j+2*k+4,j+5]:=power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
     a[j+2*k+4,j+6]:=power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
     a[j+2*k+4,j+7]:=0;
     a[j+2*k+4,j+8]:=0;
     b[j+2*k+4]:=0;
     j:=4*(i-1);
    end;
10:begin {forta concentrata intermediar}
     a[j+2*k+1,j+1]:=sin(kb*x[i]);
     a[j+2*k+1,j+2]:=cos(kb*x[i]);
     a[j+2*k+1,j+3]:=x[i];
```

```
        a[j+2*k+1,j+4]:=1;
        a[j+2*k+1,j+5]:=-sin(kb*x[i]);
        a[j+2*k+1,j+6]:=-cos(kb*x[i]);
        a[j+2*k+1,j+7]:=-x[i];
        a[j+2*k+1,j+8]:=-1;
        b[j+2*k+1]:=0;
        a[j+2*k+2,j+1]:=kb*cos(kb*x[i]);
        a[j+2*k+2,j+2]:=-kb*sin(kb*x[i]);
        a[j+2*k+2,j+3]:=1;
        a[j+2*k+2,j+4]:=0;
        a[j+2*k+2,j+5]:=-kb*cos(kb*x[i]);
        a[j+2*k+2,j+6]:=kb*sin(kb*x[i]);
        a[j+2*k+2,j+7]:=-1;
        a[j+2*k+2,j+8]:=0;
        b[j+2*k+2]:=0;
        a[j+2*k+3,j+1]:=-power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
        a[j+2*k+3,j+2]:=-power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
        a[j+2*k+3,j+3]:=0;
        a[j+2*k+3,j+4]:=0;
        a[j+2*k+3,j+5]:=power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
        a[j+2*k+3,j+6]:=power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
        a[j+2*k+3,j+7]:=0;
        a[j+2*k+3,j+8]:=0;
        b[j+2*k+3]:=0;
        a[j+2*k+4,j+1]:=-power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
        a[j+2*k+4,j+2]:=power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
        a[j+2*k+4,j+3]:=0;
        a[j+2*k+4,j+4]:=0;
        a[j+2*k+4,j+5]:=power(kb,3)*cos(kb*x[i]);
        a[j+2*k+4,j+6]:=-power(kb,3)*sin(kb*x[i]);
        a[j+2*k+4,j+7]:=0;
        a[j+2*k+4,j+8]:=0;
        b[j+2*k+4]:=-fc[i]/E/I;
        j:=4*(i-1);
       end;
    end;
  end;
end;
```

Evident, această procedură poate fi completată oricând cu instrucţiuni de atribuire specifice şi altor tipuri de rezeme discutate în capitolul precedent.

Valoarea determinantului asociat matricei $||a||$ se poate calcula, de exemplu, folosind metoda lui Gauss, implementată în corpul funcţiei mai jos listate:

```
function gauss(n:integer):extended;
label 1,2;
var i,j,k:integer;
    p,g:extended;
begin
 p:=1;
 for i:=1 to n-1 do
 begin
  if a[i,i]=0 then
  begin
   for j:=i+1 to n do
   begin
    if a[j,i]<>0 then
    begin
     for k:=1 to n do
     begin
      g:=a[i,k];
      a[i,k]:=a[j,k];
      a[j,k]:=g;
     end;
     p:=-p;
     goto 1;
    end;
   end;
   g:=0;
   goto 2;
  end;
1:
  for j:=i+1 to n do
  begin
   if a[j,i]<>0 then
    for k:=1 to n do a[j,k]:=a[j,k]-a[j,i]*a[i,k]/a[i,i]
  end;
 end;
 g:=1;
 for i:=1 to n do g:=g*a[i,i];
 g:=g*p;
2:
 gauss:=g;
end;
```

VIBRAŢII DE ÎNCOVOIERE

Dacă eforturile externe ce acţionează asupra unei bare se modifică în timp, atunci şi deformaţiile suferite de aceasta vor depinde de o a doua variabilă independentă, *t*, exprimând faptul că deplasările *du*, *dv* şi *dw* nu rămân constante.

În aceste condiţii, pentru aceeaşi ipoteză *du* = 0, ecuaţia (4), de exemplu, se va rescrie sub forma *ecuaţiei de mişcare*:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right] \pm N(t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + k_p w(x,t) - q(x,t) = 0$$

ce s-ar mai putea completa cu forţele de frecare: externă, $c_v \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}$ şi internă, $\mu I(x)\frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t}$, ambele presupuse a fi de natură vâscoasă şi caracterizate prin coeficienţii asociaţi c_v, respectiv μ.

Sarcina distribuită $q(x,t)$ va cuprinde, de această dată, atât forţele externe excitatoare $p(x,t)$ cât şi forţa de inerţie $-\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$; prin ρ s-a desemnat densitatea barei iar A este aria secţiunii sale transversale.

În cazul ideal al unei bare de rigiditate *EI* constantă, fără frecări interne (adică $\mu = 0$) şi în lipsa unor forţe de frecare externe ($c_v = 0$, în vid), ecuaţia de mişcare se simplifică şi devine:

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI}\cdot\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{p(x,t)}{EI}$$

iar funcţia $w(x,t)$ trebuie să satisfacă, pe lângă condiţiile la limită cu care ne-am obişnuit deja, şi *condiţiile iniţiale*, precizate pentru $t = 0$:

$$\begin{cases} w(x,0) = f(x) \\ \left.\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

Moduri proprii de vibraţii

Din motive ce ţin exclusiv de păstrarea formalismului consacrat al lucrărilor de specialitate, în cele ce urmează ne vom referi la deformări / deplasări / încovoieri $dv(x,t)$ ce au loc pe direcţia y.

Conform definiţiilor, modurile proprii (sau naturale) de vibraţii ale unei bare ideale sunt caracterizate prin soluţiile ecuaţiei de mişcare în vid, obţinute în lipsa forţelor excitatoare, adică:

$$\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI} \cdot \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (5)$$

Utilizând metoda separării variabilelor, pentru ecuaţia (5) se caută o soluţie de forma:

$$v(x,t) = Y(x) \cdot T(t)$$

şi avem:

$$\frac{d^4 Y(x,t)}{dx^4} T(t) + \frac{\rho A}{EI} \cdot \frac{d^2 T(x,t)}{dt^2} Y(x) = 0$$

rezultat ce presupune rezolvarea simultană a egalităţilor independente:

$$\frac{1}{Y(x)} \cdot \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} = -\frac{\rho A}{EI} \cdot \frac{1}{T(t)} \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \alpha^4$$

Concret, plecând de la ecuaţia:

$$-\frac{\rho A}{EI}\cdot\frac{1}{T(t)}\cdot\frac{d^2T(t)}{dt^2}=\alpha^4$$

rescrisă:

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2}+\alpha^4\frac{EI}{\rho A}T(x)=0$$

se caută soluţia generală:

$$T(t)=e^{r\cdot t}$$

care conduce la:

$$\left(r^2+\alpha^4\frac{EI}{\rho A}\right)e^{r\cdot t}=0$$

de unde rezultă

$$r^2+\alpha^4\frac{EI}{\rho A}=0$$

Cu ajutorul soluţiilor imaginare:

$$r_{1,2}=\pm i\alpha^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\qquad i=\sqrt{-1}$$

funcţia $T(t)$ devine:

$$T(t)=T_1e^{i\omega t}+T_2e^{-i\omega t}$$

sau, exprimând exponenţialele $exp(i\omega t)$ şi $exp(-i\omega t)$ prin intermediul funcţiilor trigonometrice $sin(\omega t)$ şi $cos(\omega t)$:

$$T(t)=T_0\,sin(\omega t+\varphi)$$

ceea ce înseamnă că bara studiată execută *oscilaţii armonice* cu *pulsaţia proprie*:

$$\omega_0 = \alpha^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

În mod similar, plecând de la ecuaţia:

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \alpha^4 Y(x) = 0$$

avem, consecutiv:

$$Y(x) = e^{r \cdot x}$$

$$\left(r^4 - \alpha^4\right) e^{r \cdot x} = 0$$

$$r^4 - \alpha^4 = 0$$

$$r_1 = -\alpha\,; \qquad r_2 = \alpha\,; \qquad r_2 = -i\alpha\,; \qquad r_2 = i\alpha$$

astfel încât *funcţia proprie* $Y(x)$ capătă forma:

$$Y(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + Ce^{i\alpha x} + De^{-i\alpha x}$$

Exprimând, acum, exponenţialele *exp*(iωt) şi *exp*(-iωt) prin intermediul funcţiilor trigonometrice *sin*(ωt) şi *cos*(ωt), respectiv exponenţialele *exp*(ωt) şi *exp*(-ωt) prin intermediul funcţiilor hiperbolice *sh*(ωt) şi *ch*(ωt), se regăseşte expresia consacrată:

$$Y(x) = C_1\, sin(\alpha x) + C_2\, cos(\alpha x) + C_3 sh(\alpha x) + C_4 ch(\alpha x)$$

Funcţia proprie împreună cu *pulsaţia proprie* definesc ceea ce se numeşte un *mod propriu* şi fac obiectul studiilor de *analiză modală*.

Necunoscutele reprezentând constantele de integrare C_1, C_2, C_3 şi C_4, respectiv parametrul modal α se determină, şi de această dată, din condiţiile la limită, iar T_0 şi φ din condiţiile iniţiale.

De exemplu, dacă bara de lungime L este încastrată rigid la ambele capete şi nu are alte reazeme intermediare, atunci din condiţiile la limită se obţine sistemul compatibil nedeterminat de patru ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 + C_3 = 0 \\ C_1\, sin(\alpha L) + C_2\, cos(\alpha L) + C_3 sh(\alpha L) + C_4 ch(\alpha L) = 0 \\ C_1\, cos(\alpha L) - C_2\, sin(\alpha L) + C_3 ch(\alpha L) + C_4 sh(\alpha L) = 0 \end{cases}$$

ce va admite soluţii nebanale dacă şi numai dacă determinantul său se anulează, adică:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ sin(\alpha L) & cos(\alpha L) & sh(\alpha L) & ch(\alpha L) \\ cos(\alpha L) & -sin(\alpha L) & ch(\alpha L) & sh(\alpha L) \end{vmatrix} = 0$$

Ultima egalitate reprezintă *ecuaţia pulsaţiilor proprii* şi, adusă la forma simplificată:

$$ch(\alpha L)cos(\alpha L) = 1$$

are soluţiile:

$$\alpha_1 = \frac{4{,}7300}{L}; \qquad \alpha_2 = \frac{7{,}8532}{L}; \qquad \alpha_n = \frac{2n+1}{2L}\pi \ \ (n > 2)$$

cărora le corespund *frecvenţele proprii*:

$$\nu_{0,1} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4{,}7300}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \qquad \nu_{0,2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{7{,}8532}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

$$\nu_{0,n} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad (n > 2)$$

Se observă că există un număr infinit de moduri de vibraţie, desemnate prin valorile naturale ale indicelui *n*.

Alegând acum valorile C_{1n} drept variabile independente, atunci pentru celelalte necunoscute C_{2n}, C_{3n} şi C_{4n} se obţin soluţiile:

$$C_{2n} = C_{1n}\frac{cos(\alpha_n L) - ch(\alpha_n L)}{sin(\alpha_n L) + sh(\alpha_n L)}$$

$$C_{3n} = -C_{1n}$$

$$C_{4n} = -C_{1n}\frac{cos(\alpha_n L) - ch(\alpha_n L)}{sin(\alpha_n L) + sh(\alpha_n L)}$$

şi forma fibrei deformate în modul *n* de vibraţie va fi descrisă de funcţia proprie:

$$Y_n(x) = C_{1n}\left[sin(\alpha_n x) + \frac{cos(\alpha_n L) - ch(\alpha_n L)}{sin(\alpha_n L) + sh(\alpha_n L)}cos(\alpha_n x) - \right.$$
$$\left. - sh(\alpha_n x) - \frac{cos(\alpha_n L) - ch(\alpha_n L)}{sin(\alpha_n L) + sh(\alpha_n L)}ch(\alpha_n x)\right]$$

Evident, pentru oscilaţiile armonice vom avea:

$$T_n(t) = T_0\, sin(\omega_{0,n} t + \varphi_n); \qquad \omega_{0,n} = 2\pi\nu_{0,n}$$

şi modul *n* de vibraţie va fi caracterizat, în final, prin:

$$v_n(x,t) = A_n\left[sin(\alpha_n x) + \frac{cos(\alpha_n L) - ch(\alpha_n L)}{sin(\alpha_n L) + sh(\alpha_n L)}cos(\alpha_n x) - \right.$$
$$\left. - sh(\alpha_n x) - \frac{cos(\alpha_n L) - ch(\alpha_n L)}{sin(\alpha_n L) + sh(\alpha_n L)}ch(\alpha_n x)\right] sin(\omega_{0,n} t + \varphi_n)$$

cu constantele A_n şi φ_n determinate din condiţiile iniţiale ($t = 0$).

În mod similar se poate demonstra că dacă aceeaşi bară s-ar sprijini la capete pe reazeme simplu rigide, atunci modurile sale proprii de vibraţii ar fi caracterizate cu ajutorul relaţiilor:

$$v_n(x,t) = A_n\left[sin(\alpha_n x) + \frac{sin(\alpha_n L)}{sh(\alpha_n L)}sh(\alpha_n x)\right] sin(\omega_{0,n} t + \varphi_n)$$

$$\omega_{0,n} = 2\pi\nu_{0,n}; \qquad \nu_{0,n} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Comparând cele două exemple de încovoiere la vibraţii se poate remarca existenţa unei dependenţe directe, explicite, atât a formei fibrei deformate cât şi a frecvenţelor proprii de natura reazemelor (de capăt).

Vibraţiile unei bare reale în mediu fluid vâscos

Aşa cum am subliniat deja, modurile proprii caracterizează situaţia ideală a vibraţiilor libere (fără forţă excitatoare) în vid, ale unei bare fără frecări interne.

În vederea studierii vibraţiilor libere într-un mediu fluid oarecare (vâscos) va trebui să se ţină seama, pe lângă forţa de frecare externă, şi de faptul că, oscilând, bara va trebui să deplaseze (să disloce) o masă adiţională de fluid, m_a (pe unitatea de lungime).

Dacă se iau în calcul şi forţele de frecare internă şi externă amintite la începutul acestui capitol, ecuaţia de mişcare capătă expresia:

$$EI\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \mu I\frac{\partial^5 v(x,t)}{\partial x^4 \partial t} \pm N\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + c_v\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + (\rho A + m_a)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

a cărei rezolvare permite obţinerea formulei de calcul pentru *coeficientul total de amortizare, n*:

$$n = \frac{\alpha^4\mu I + c_v}{2(\rho A + m_a)}$$

respectiv obţinerea formulei de calcul pentru *pulsaţiile libere în fluid*:

$$\omega = \alpha^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A + m_a}\left(1 \pm \frac{N}{\alpha^2 EI}\right)} = \omega_0\sqrt{\frac{\rho A}{\rho A + m_a}\left(1 \pm \frac{N}{\alpha^2 EI}\right)}$$

Prezenţei forţelor de frecare determină executarea de către bara studiată a unei mişcări periodice amortizate, caracterizată prin *raportul de amortizare*:

$$\zeta = \frac{n}{\omega} = \frac{\alpha^4 \mu I + c_v}{2\alpha^2 \sqrt{EI(\rho A + m_a)\left(1 \pm \frac{N}{\alpha^2 EI}\right)}}$$

şi, în cazul amortizării subcritice ($\zeta^2 < 1$), prin *pseudopulsaţia*:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2} = \omega\sqrt{1 - \zeta^2} \; ;$$

Cu ajutorul acestor mărimi, soluţia ecuaţiei de mişcare se va scrie:

$$v(x,t) = Y(\alpha x) e^{-\zeta\omega t} \cdot T_0 \, sin(\omega_1 t + \varphi)$$

unde funcţia fibrei deformate $Y(\alpha x)$ se determină din condiţiile de rezemare, iar constantele de integrare T_o şi φ din condiţiile iniţiale ($t = 0$). Avem, prin urmare, o oscilaţie liberă amortizată.

Masa adiţională

Prin masă adiţională (sau masă hidrodinamică) se înţelege, în general, *masa de fluid deplasată* de bară atunci când aceasta din urmă execută o mişcare vibratorie de încovoiere.

Definiţia de mai sus se poate folosi ca atare numai atunci când avem *o singură bară* imersată într-*un volum infinit* de fluid.

În cazul unui număr oarecare de bare (paralele) imersate într-un fluid (apă) cu volum limitat, masa adiţională este afectată atât de mişcarea celorlalte bare precum şi de poziţia acestora faţă de frontiera fluidului.

Determinări minuţioase ale masei adiţionale m_a pentru o bară cilindrică de masă m_c se pot face măsurând frecvenţele de rezonanţă în aer f_{aer} şi în apă $f_{apă}$, prin prelucrarea cărora obţine formula de calcul:

$$m_a = m_c \left[\left(\frac{\nu_{aer}}{\nu_{apă}} \right)^2 - 1 \right]$$

Plecând de la aceste rezultate şi ţinând cont de definiţia dată anterior, se poate considera că masa de fluid deplasată este proporţională cu volumul cilindrului, adică :

$$m_a = c_m \rho_f \pi \frac{d^2}{4}$$

unde ρ_f este densitatea fluidului, d diametrul cilindrului (barei) şi c_m un factor, numit adesea şi *coeficient de masă adiţională*.

Coeficientul de masă adiţională ţine cont de condiţiile de frontieră. În cazul unui singur cilindru de diametru d, aflat în interiorul unui tub de diametru D, în urma rezolvării ecuaţiilor Navier-Stokes pentru mişcarea *unidimensională* (cei doi cilindri se consideră ca având lungimi infinite), se obţine:

$$c_m = \frac{D^2 + d^2}{D^2 - d^2}$$

Rezolvând aceleaşi ecuaţii de mişcare Navier-Stokes dar de data aceasta în cazul mişcării *bidimensionale* a unui singur cilindru poziţionat *concentric* in interiorul unui tub încărcat cu fluid, avem:

$$c_m = \frac{\left[bJ_0(b) - J_1(b)\right] \cdot Y_1(a) - \left[bY_0(b) - Y_1(b)\right] \cdot J_1(a)}{\left[bY_0(b) - Y_1(b)\right] \cdot \left[aJ_0(a) - J_1(a)\right] - \left[bJ_0(b) - J_1(b)\right] \cdot \left[aY_0(a) - Y_1(a)\right]}$$

cu:

$$a = \omega \frac{d}{2} c \; ; \qquad b = \omega \frac{D}{2} c$$

unde J_m şi Y_m sunt funcţiile Bessel de ordinul I şi II, $\omega = 2\pi\nu$ pulsaţia barei cilindrice iar c este viteza sunetului în fluidul respectiv.

Formula de calcul se complică semnificativ dacă cei doi cilindrii *sunt excentrici*, şi încă şi mai mult dacă se iau în considerare *lungimile lor finite*.

Vibraţii întreţinute

Vibraţiile libere de încovoiere ale unei bare drepte pot fi declanşate, de exemplu, printr-un şoc mecanic (exterior).

Aşa cum s-a văzut în paragrafele anterioare, prezenţa forţelor de frecare internă şi externă va determin executarea de către bara studiată a unor vibraţii de încovoiere amortizate. Aceasta înseamnă că la un moment dat mişcarea va înceta.

Prioritare, însă, din punct de vedere al studiilor tehnologice, rămân situaţiile când aceste vibraţii de încovoiere sunt întreţinute prin acţiunea externă a aşa-numitelor *forţe excitatoare*. Două tipuri mai des întâlnite de forţe excitatoare ar fi cele *armonice*, respectiv cele *aleatoare*.

Forţă excitatoare armonică

Vom presupune că avem de-a face cu forţa excitatoare sinusoidală:

$$p_0(x,t) = p_0(x)\sin(\Omega t)$$

ce ne permite să rescriem ecuaţia de mişcare sub forma:

$$\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\mu}{E}\frac{\partial^5 v(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + \frac{N}{EI}\cdot\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \frac{c_v}{EI}\cdot\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{(\rho A + m_a)}{EI}\cdot\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \frac{p_0(x)}{EI}\sin(\Omega t) \tag{6}$$

Soluţia ecuaţiei de mişcare fără forţă excitatoare reprezintă, aşa cum s-a prezentat anterior, o mişcare liberă amortizată descrisă prin formula:

$$v(x,t) = Y(\alpha x)e^{-\zeta\omega t}\cdot T_0 \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

Conform teoriei generale a sistemelor oscilante cu amortizare vâscoasă, pentru ecuaţia (6) se caută o soluţie particulară de forma:

$$v_{particular}(x,t) = Y_{particular}(x)sin(\Omega t - \theta)$$

astfel încât soluţia generală a ecuaţiei de mişcare (6) va fi:

$$v(x,t) = Y(\alpha x)e^{-\zeta\omega t} \cdot T_0\, sin(\omega_1 t + \varphi) + Y_{particular}(x)sin(\Omega t - \theta)$$

Se observă că, datorită amortizării, vibraţiile proprii se anulează exponenţial astfel încât, după trecerea fazei tranzitorii, se poate lua în considerare numai soluţia staţionară corespunzătoare vibraţiilor întreţinute.

Cu alte cuvinte, sub acţiunea unei forţe excitatoare periodice, bara va executa vibraţii de încovoiere având pulsaţia egală cu pulsaţia forţei respective. În acelaşi timp funcţia $Y_{particular}(x)$ trebuie să satisfacă atât ecuaţia de mişcare (6) cât şi condiţiile la limită în reazeme. Acestea vor fi implicit îndeplinite dacă $Y_{,particular}(x)$ se alege sub forma unei dezvoltări în serie după funcţiile proprii $Y(x)$, adică:

$$Y_{particular}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k Y_k(x)$$

şi

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k Y_k(x) sin(\Omega t - \theta) \qquad (7)$$

unde prin indicele k s-a identificat modul propriu de vibraţie de ordinul k.

Ţinând cont de faptul că:

$$\frac{d^4 Y_k(x)}{dx^4} = \alpha_k^4 Y_k(x); \qquad \frac{d^2 Y_k(x)}{dx^2} = \alpha_k^2 Y_k(x)$$

după înlocuirea soluţiei (7) în ecuaţia de mişcare (6) obţinem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[\alpha_k^4 + \frac{\alpha_k^2 N}{EI} - \frac{(\rho A - m_a)}{EI}\Omega^2 \right] Y_k(x) sin(\Omega t - \theta) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k^4 \mu}{E} + \frac{c_v}{EI} \right) \Omega Y_k(x) cos(\Omega t - \theta) = \frac{p_0(x)}{EI_z} sin(\Omega t)$$

Dezvoltând funcţiile trigonometrice şi folosind definiţiile anterioare ale mărimilor *n*, ω, şi ζ, ultima ecuaţie devine:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k\left(\omega_k^2-\Omega^2\right)cos(\theta)\left[\left(1+\frac{2\zeta\omega_k\Omega}{\omega_k^2-\Omega^2}\,tg(\theta)\right)sin(\Omega t)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2\zeta\omega_k\Omega}{\omega_k^2-\Omega^2}-tg(\theta)\right)cos(\Omega t)\right]Y_k(x)=\frac{p_0(x)}{\rho A+m_a}\,sin(\Omega t)$$

Această egalitate poate avea loc dacă şi numai dacă valoarea coeficientului funcţiei *cos*(Ω*t*) este nulă, adică:

$$tg(\theta_k)=\frac{2\zeta\omega_k\cdot\Omega}{\omega_k^2-\Omega^2};\qquad cos(\theta_k)=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\theta_k)}}$$

Simplificând prin *sin*(Ω*t*), se obţine:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k\left(\omega_k^2-\Omega^2\right)cos(\theta_k)\cdot\left[1+tg^2(\theta_k)\right]Y_k(x)=\frac{p_0(x)}{\rho A+m_a}$$

şi, după înlocuirea definiţiei funcţiei *tg*(θ) şi înmulţirea cu (ρ*A* + *m*$_a$):

$$(\rho A+m_a)\sum_{k=1}^{\infty} C_k\sqrt{\left(\omega_k^2-\Omega^2\right)+\left(2\zeta\omega_k\Omega\right)^2}\,Y_k(x)=p_0(x)$$

În vederea determinării valorilor coeficienţilor C_k vom înmulţi ultima relaţie cu $Y_m(x)$ şi vom integra pe toată lungimea barei, *L*:

$$(\rho A+m_a)\int_0^L\sum_{k=1}^{\infty} C_k\sqrt{\left(\omega_k^2-\Omega^2\right)+\left(2\zeta\omega_k\Omega\right)^2}\,Y_k(x)Y_m(x)dx=\int_0^L p_0(x)Y_m(x)dx$$

şi, folosind proprietatea de ortogonalitate a funcţiilor proprii:

$$\int_0^L Y_k(x)Y_m(x)dx=\begin{cases}0 & k\neq m\\ B_k & k=m\end{cases}$$

rezultă, în final:

$$C_k = \frac{1}{(\rho A + m_a)\sqrt{\left(\omega_k^2 - \Omega^2\right) + \left(2\zeta\omega_k\Omega\right)^2}\, B_k} \int_0^L p_0(x) Y_m(x) dx$$

Pentru o forţă perturbatoare constantă pe toată lungimea elementului combustibil, $p_0(x)=p_0$, coeficienţii C_k devin:

$$C_k = \frac{p_0}{(\rho A + m_a)\sqrt{\left(\omega_k^2 - \Omega^2\right) + \left(2\zeta\omega_k\Omega\right)^2}\, B_k} \int_0^L Y_m(x) dx$$

iar dacă forţa perturbatoare P_0 este concentrată în secţiunea $x = x_*$, valoarea corespunzătoare unităţii de lungime $p_0(x)$ se poate exprima cu ajutorul funcţiei simbolice Dirac, $\delta(x)$:

$$p_0(x) = P_0 \delta\left(x - x^*\right)$$

astfel încât coeficienţii C_k devin:

$$C_k = \frac{P_0}{(\rho A + m_a)\sqrt{\left(\omega_k^2 - \Omega^2\right) + \left(2\zeta\omega_k\Omega\right)^2}\, B_k} \int_0^L \delta\left(x - x^*\right) Y_m(x) dx$$

adică:

$$C_k = \frac{P_0 Y_m\left(x^*\right)}{(\rho A + m_a)\sqrt{\left(\omega_k^2 - \Omega^2\right) + \left(2\zeta\omega_k\Omega\right)^2}\, B_k}$$

Din formulele de mai sus rezultă că mărimile C_k sunt funcţii de pulsaţia excitatoare Ω, valorile lor maxime fiind atinse pentru:

$$\Omega = \omega_k \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Evident, în lipsa frecărilor interne şi externe ($\mu = 0$ şi $c_v = 0$) vom avea rezultatul imediat $\Omega = \omega_k$.

Prin urmare, când pulsaţia Ω a forţei perturbatoare este în aproprierea uneia din pulsaţiile proprii ω_k vom avea de-a face cu fenomenul de rezonanţă, caracterizat prin creşterea semnificativă a amplitudinilor vibraţiilor. Fapt pentru care fiecărui coeficient C_k în parte i se asociază *factorul de amplificare*:

$$A_k = C_k \frac{\omega_k (\rho A - m_a) B_k}{\int_0^L p_0(x) Y_m(x) dx} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_k^2}\right)^2 + (2\zeta)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_k}\right)^2}}$$

Forţă excitatoare aleatoare

Fără a intra în detalii privind calculele de analiză spectrală (metodă specifică utilizată în cazul semnalelor aleatoare), subliniem faptul că dacă prin $F(\Omega,t)$ se desemnează forţa excitatoare externă, atunci ecuaţia ce descrie evoluţia temporală a unui oscilator armonic cu amortizare vâscoasă (situaţie valabilă şi cazului vibraţiilor de încovoiere ale unei bare drepte şi omogene) are forma generală:

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_k \frac{dT(t)}{dt} + \omega_k^2 T(t) = F(\Omega,t)$$

Aplicând acestei ecuaţii transformata Fourier se obţine funcţia de răspuns în frecvenţă a sistemului analizat:

$$H(j\Omega) = \frac{1}{\omega_k^2 - \Omega^2 + j2\zeta\omega_k\Omega}$$

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_k^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\zeta\omega_k\Omega)^2}}$$

unde, ca şi în cazul analizat anterior, prin Ω se înţelege o pulsaţie caracteristică a forţei excitatoare, iar pin ω_k pulsaţia modului k de vibraţie.

Dacă sursa de excitaţii aleatoare are o structură de *zgomot alb* (frecvenţele perturbatoare Ω se găsesc uniform distribuite în interiorul unei anumite benzi, limitată sa nu) şi dacă, în plus, S_0 = *constantă* este densitatea spectrala a zgomotului alb, atunci bara (oscilatorul) va executa vibraţii de încovoiere aleatoare tot de tip zgomot alb, densitatea spectrală a răspunsului său fiind:

$$S(\Omega) = H^*(j\Omega) \cdot H(j\Omega) \cdot S_0 = |H(j\Omega)|^2 S_0 = \frac{S_0}{\left(\omega_k^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\zeta^2\omega_k^2\Omega^2}$$

Anulând derivata întâi a funcţiei $S(\Omega)$ în raport cu Ω avem:

$$\frac{dS(\Omega)}{d\Omega} = -S_0 \frac{8\zeta^2\omega_k^2\Omega - 4\left(\omega_k^2 - \Omega^2\right)\Omega}{\left[\left(\omega_k^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\zeta^2\omega_k^2\Omega^2\right]^2} = 0$$

şi rezultă că funcţia $S(\Omega)$ prezintă maxime pentru pulsaţiile excitatoare:

$$\Omega = \omega_k\sqrt{1-2\zeta^2}$$

Prin urmare, densitatea de putere a răspunsului barei va prezenta maxime (fenomen de rezonanţă) pentru frecvenţe excitatoare Ω proporţionale cu frecvenţele proprii ω_k, valorile de extrem calculându-se cu formula:

$$S_{k,max} = \frac{S_0}{4\zeta^2\omega_k^2\left(1-\zeta^2\right)}$$

Alte elemente caracteristice răspunsului aleatoriu al barei, pe armonica k, vor fi:

- răspunsul mediu (în timp)

$$\overline{v_k(x,t)} = \frac{S_0}{\omega_k^2}Y_k(x)$$

- răspunsul mediu pătratic (în timp)

$$\overline{v_k^2(x,t)} = \frac{S_0}{\omega_k^3}Y_k(x)$$

- funcţia de autocorelaţie

$$R_{vv,k}(\tau) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{S_0}{\zeta\omega_k^3}e^{-\zeta\omega_k|\tau|}\left[cos\left(\omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\tau\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}sin\left(\omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\tau\right)\right]$$

unde, evident, prin $Y_k(x)$ s-a indicat funcţia fibrei deformate specifice armonicii de ordinul k.

VIBRAŢII INDUSE DE CURGEREA PARALELĂ

Barele (tuburile, conductele etc.) aflate sub acţiunea unui fluid curgând paralel cu acestea, prin exteriorul lor sau prin interiorul acestora, vor executa vibraţii de încovoiere întreţinute de forţe putând avea caracter aleator (datorat turbulenţei curgerii) sau pulsatoriu (datorat pulsaţiilor de presiune generate de pompele de circulaţie).

În cazul vibraţiilor induse de curgerea paralelă a unui fluid se acceptă existenţa următoarelor forţe ce acţionează pe unitatea de lungime a barei studiate:

- *forţa de antrenare transversală*, dependentă de gradientul vitezei de curgere a fluidului;
- *forţa de antrenare longitudinală*, dependentă de modulul vitezei de curgere a fluidului;
- *forţele de presiune*, normale pe suprafaţa laterală, rezultate din schimbarea fluxului momentan lateral al fluidului şi considerate a fi independente de mişcarea barei;
- *forţele de frecare externă*, proporţionale cu viteza de vibraţie şi opuse mişcării;
- *forţele de inerţie*, dependente de acceleraţia vibraţiilor şi de masa elementului vibrator;
- *forţele elastice*, dependente de rigiditatea barei şi de derivata parţială de ordinul patru a deplasării;
- *forţele de frecare internă*, dependente de momentul de inerţie şi derivata parţială de ordinul doi a deplasării;

- *forţele axiale de compresie sau întindere*, dependente de căderea de presiune pe lungimea elementului studiat şi modul de rezemare la capete.

Energia este creată de forţele de antrenare şi disipată de celelalte şase descrise mai sus. Prin urmare, primul pas în studierea răspunsului unei bare sub acţiunea acestor forţe constă în identificarea surselor de excitare. În această privinţă se acceptă că mecanismele care participă cel mai frecvent şi au un efect semnificativ în amplitudinea vibraţiilor sunt cele care generează răspunsul aleator al sistemului elastic, ele putând fi împărţite în patru categorii importante:

- excitaţia turbulentă;
- excitaţia fluido-elastică;
- excitaţia prin frecvenţă discretă;
- excitaţia datorată componentelor transversale ale curgerii paralele.

În funcţie de condiţiile reale de funcţionare, sau de experimentare pe standuri de încercări, unele dintre mecanismele de excitare prezentate mai sus pot fi sursa dominantă de energie. De cele mai multe ori însă este dificilă identificarea excitaţiei predominante datorită interacţiunilor care pot avea loc între aceste mecanisme, descrise în cele ce urmează.

Excitaţia turbulentă

Fluctuaţiile de presiune în curgerea turbulentă paralelă pot cauza vibraţii de încovoiere ale barelor şi tuburilor. Fluctuaţiile apar în imediata vecinătate a pereţilor rigizi sau sunt "transportate" spre aceştia de către perturbaţiile curentului de fluid.

De obicei se acceptă că fluctuaţiile de presiune care cauzează vibraţii mecanice sunt generate:

- în straturile turbulente de la capete, formându-se la suprafaţa rigidă a barelor;

- prin turbulenţa rezultată din curgerea separată datorită eventualelor neuniformităţi în canalul de.

Energiile asociate cu fluctuaţiile de presiune turbulente sunt distribuite, în general într-o bandă largă de frecvenţă şi mai puţin concentrate în jurul unei frecvenţe discrete. Mecanismul excitaţiilor turbulente constă în solicitări aleatoare dintre care bara selectează pentru răspunsul său mai ales acea porţiune de energie care este "închisă" în jurul unei frecvenţe proprii.

Vibraţia nu trebuie să cauzeze o creştere a forţelor turbulente efective, acestea fiind independente de mişcarea vibratorie.

Excitaţia fluido-elastică

Vibraţiile fluido-elastice sunt caracterizate printr-o viteză critică de curgere până la care amplitudinile de oscilaţie sunt mici şi după care acestea cresc foarte repede.

Sunt posibile două mecanisme fluido-elastice:

- un mecanism care depinde de poziţia sistemului vibrator (bară, tub etc.) şi care este independent de timp;
- un mecanism care depinde în special de timp.

În primul caz se consideră că există în fiecare moment o situaţie de curgere staţionară. Forţele care acţionează aspra barei variază atunci când poziţia sa relativă faţă de fluid se schimbă. Datorită acestor schimbări, bara suportă forţe mari de dragare, ce vor induce, astfel, vibraţii.

Pentru mecanismul dependent de timp, forţele generate nu sunt numai funcţii de poziţia relativă a sistemului elastic faţă de curgerea dată, ci depind mai ales de existenţa unei curgeri nestaţionare şi de interacţiunile temporare dintre bara vibratoare şi câmpul de curgere. Se presupune, de asemenea, că deplasarea relativă a barei faţă de fluid poate provoca şi vibraţii autoexcitate.

Excitaţia prin frecvenţe discrete

În general, fluctuaţiile de presiune cauzate de separarea curgerilor prin valve, conducte şi pompe sunt strâns legate de neuniformităţile în pasajul de curgere şi sunt aleatoare, spectrul densităţii de putere al fluctuaţiilor fiind distribuit într-o bandă (mai largă sau mai îngustă de frecvenţe. Totuşi, există şi cazuri în care fluctuaţiile de presiune pot fi periodice, cum ar fi, de exemplu, cele induse de funcţionarea pompelor de circulaţie.

Dacă frecvenţa unei componente a fluctuaţiei este în imediata vecinătate a unei frecvenţe naturale a sistemului elastic, acesta va prezenta (executa) vibraţii forţate de amplitudine mare (rezonanţă).

Nu toate frecvenţele discrete ale pulsaţiilor aleatoare de presiune generate în sistemul bară /fluid vor excita vibraţii de încovoiere. De exemplu, unda de frecvenţă discretă şi presiune aleatoare care se propagă în lungul unei bare poate cauza unde staţionare axiale în sistem, dar nu poate cauza, în câmpul de curgere, gradienţi transversali de presiune cantitativ apreciabili, astfel încât forţele transversale, acţionând pe bara respectivă, tind să se anuleze. Aceste pulsaţii vor trece în lungul barei ca o undă unidimensională, viteza undei fiind egală cu viteza sunetului în fluid. În fiecare moment, presiunea este egal distribuită în jurul suprafeţei barei şi nu contribuie semnificativ la vibraţiile acesteia.

Excitaţia componentei transversale de curgere

Pentru barele aflate în curgere paralelă şi prezentând oscilaţii de amplitudini relativ mici se acceptă că vibraţiile sunt excitate în primul rând de componenta transversală a curgerii şi de orice altă deviere de la curgerea staţionară. Aceste componente pot cauza vibraţii ale barei, la fel ca şi excitaţiile de frecvenţe discrete, datorită răspândirii de vârtejuri de către bară. Prin urmare, cele două mecanisme se pot suprapune, efectele lor însumându-se, fără a se putea specifica existenţa predominantă a unuia sau altuia dintre ele.

Amortizarea vibraţiilor de încovoiere

Aşa cum s-a arătat la începutul prezentului capitol, o parte din energia cedată de toate tipurile de mecanisme de excitare existente la un moment dat în curgerea paralelă va fi disipată cu precădere prin amortizare.

Amortizarea totală a barei (tubului, conductei etc.) este egală cu suma dintre amortizarea hidrodinamică datorată forţelor de frecare externă, şi amortizarea mecanică datorată forţelor de frecare internă.

Funcţie de situaţiile reale experimentale sau de funcţionare, unul sau celălalt dintre aceste două mecanisme poate fi predominant.

Amortizarea hidrodinamică

Când o bară vibrează într-un fluid, energia cinetică este comunicată fluidului şi creşte masa efectivă de oscilaţie a barei. Această creştere, numită *masă adiţională*, este dependentă de geometria barei. În cazul unui fascicul de bare, masa adiţională este suma maselor adiţionale ale barelor componente.

Importanţa practică a masei adiţionale este aceea că ea conduce la *micşorarea valorilor frecvenţelor naturale*.

Amortizarea hidrodinamică poate fi descompusă în:

- amortizarea rezultată din vibraţia barei în fluid staţionar;
- amortizarea rezultată din viteza de curgere axială a fluidului de răcire.

O tratare riguroasă a amortizării hidrodinamice impune analiza interacţiunilor dintre condiţiile de frontieră, datorate construcţiei, şi cele de suprafaţă, cerute de curgerea axială.

La viteze de curgere mici, primul tip de condiţii este singura sursă de amortizare hidrodinamică, iar la viteze de curgere mari, condiţiile de

suprafaţă cerute de curgerea axială devin cauze predominante ale amortizării.

Evident, pentru viteze intermediare de curgere, ambele tipuri de condiţii vor contribui la amortizare, interacţiunea dintre ele fiind complexă.

Amortizarea mecanică

În timpul vibraţiilor, energia este disipată sub o formă sau alta şi amplitudinea nu poate fi menţinută constantă fără un aport continuu de energie. O descriere a forţelor de amortizare mecanică asociate cu disiparea de energie este dificilă, acestea putând fi funcţii de deplasare, viteză, solicitări sau alţi factori.

În sfârşit, o altă formă de disipare mecanică a energiei mişcării vibratorii este cea cunoscută sub numele de *amortizare internă*, caracteristică oricărui sistem elastic.

Răspunsul barei elastice la vibraţii induse

S-a văzut că o bară introdusă într-un fluid aflat în curgere paralelă poate vibra datorită unei varietăţi de cauze. Răspunsul barei poate fi static sau dinamic.

Răspunsul static presupune o deformare statică, indusă de următoarele forţe:

- forţe de frânare;
- forţe centrifuge;
- forţe date de presiunea statică a fluidului;
- instabilităţi statice.

Răspunsul dinamic presupune:

- vibraţii forţate;

- vibraţii autoexcitate şi
- rezonanţa parametrică.

Vibraţia forţată: la viteze de curgere subcritice, bara este supusă la excitaţii de curgere. Dacă forţa de excitaţie este periodică, cum ar fi revărsarea vârtejurilor, respectiv, periodicitatea indusă de funcţionarea pompelor de circulaţie, pot apare oscilaţii cu amplitudini mari, strâns legate de fenomenul de rezonanţă. Dacă excitaţia este dată de fluctuaţii de presiune aleatoare, oscilaţiile au, în general, amplitudini mici.

Vibraţii autoexcitate: sunt vibraţii cu amplitudine relativ mare, care au fost observate experimental, pentru viteze de curgere mari.

Rezonanţa parametrică: curgerea pulsatorie şi curgerea bifazică pot induce rezonanţe parametrice şi combinatorii.

Vibraţii de încovoiere în fluid staţionar

În cazul unei anumite structuri imersate într-un fluid, fluidul înconjurător trebuie să fie deplasat pentru a uşura mişcarea. Acest efect este luat în calcul prin intermediul conceptului de *masă adiţională*. În mod ideal, masa adiţională poate fi determinată din ecuaţia tridimensională Navier-Stokes, dar un astfel de calcul este dificil chiar şi în cazuri simple. Pentru vibraţii cu amplitudini mici, masa adiţională poate fi calculată cu ajutorul teoriei potenţialului de curgere, teorie care are, totuşi, unele limite.

Pentru un fluid vâscos, forţa fluidului poate fi separată în două componente: una în fază cu acceleraţia (efectul de masă adiţională) şi alta opusă mişcării (efectul de amortizare). În cele mai practice situaţii, efectul vâscozităţii fluidului asupra masei adiţionale este mic. Însă vâscozitatea fluidului contribuie semnificativ la procesul de frânare, mai ales în cazurile în care amortizarea asociată cu vâscozitatea fluidului este foarte mare. Atât mărimea masei adiţionale cât şi amortizarea depind de amplitudinea vibraţiilor.

Efectul compresibilităţii fluidului asupra mişcării structurii este similar cu cel al vâscozităţii deoarece, în cazul vibraţiei unei bare singulare într-un

volum infinit de fluid, masa adiţională depinde de lungimea de undă a perturbaţiei ce se deplasează prin lichid. La fel, amortizarea radiativă poate deveni semnificativă. Cu alte cuvinte, compresibilitatea fluidului afectează modurile structurii datorită cuplajului fluid-bară elastică, fenomen asemănător cuplajului acustico-elastic.

Probleme mai complexe le ridică vibraţiile cuplate ale elementelor multiplu structurale, cum este cazul unui fascicul de bare. Datorită efectului de cuplaj al fluidului, mişcarea unei bare într-un grup de mai multe bare va avea influenţe asupra celorlalte bare şi fiecare bară va răspunde în cadrul grupului şi mai puţin individual.

Când un grup de cilindri vibrează într-un fluid (vibraţii cuplate), există o relaţie bine determinată pentru faza dintre cilindri. Dacă într-un grup de cilindri numai unul singur oscilează şi ceilalţi rămân în repaus, mişcarea primului se numeşte necuplată.

Caracteristicile generale dinamice ale vibraţiilor cuplate diferă de cele pentru un singur cilindru. Să considerăm, de exemplu, un grup de cilindri identici, cu o frecvenţă naturală în vid egală cu f_0 şi masa m. Există trei cazuri de vibraţii care interesează:

- Bară singulară în fluid infinit:

$$f_1 = \frac{f_0}{\sqrt{1+\frac{m_f}{m}}}$$

- Vibraţii necuplate pentru mai multe bare aflate în fluid:

$$f_2 = \frac{f_0}{\sqrt{1+\frac{m_a}{m}}}$$

- Vibraţii cuplate pentru mai multe bare aflate în fluid:

$$f_3 = \frac{f_0}{\sqrt{1+\frac{m_p}{m}}}$$

unde: m_f = masa de fluid deplasată; m_a = masa adiţională; m_p= valorile proprii ale matricei masei adiţionale.

Vibraţii induse de curgerea paralelă

Problema mişcării structurilor mecanice supuse unei curgeri externe sau/şi conţinând un fluid în curgere este cunoscută sub numele de *vibraţii induse de curgere*. În legătură cu orientarea curgerii fluidului faţă de o anumită axă principală a structurii s-a convenit să se clasifice problema vibraţiilor induse în:

- cazul curgerii paralele;
- cazul curgerii transversale.

Fluidul aflat în curgere printr-un sistem este o sursă de energie care poate induce vibraţii şi instabilităţi. Fără curgere, sistemul se comportă ca o structură elastică în vid, dar frecvenţa este redusă datorită efectului masei adiţionale. În prezenţa curgerii, sistemele conservative şi cele neconservative răspund în mod diferit la creşterea vitezei de curgere.

În *sistemele conservative* frecvenţa creşte cu descreşterea vitezei de curgere. Pentru o anumită valoare a vitezei de curgere, prima frecvenţă naturală tinde către zero şi sistemul îşi pierde stabilitatea, apărând fenomenul de flambaj. Crescând, în continuare, viteza de curgere, alte frecvenţe naturale pot să se anuleze. Aceste viteze de curgere sunt aşa-numitele *viteze de curgere critice pentru modurile joase*.

În *sistemele neconservative* frecvenţa este, în general, complexă. La viteze de curgere mici sistemul execută oscilaţii amortizate în toate modurile.

Alte efecte ale curgerii fluidului asupra evoluţiei vibraţiilor sunt:

- reducerea frecvenţelor proprii;
- contribuţii la amortizarea mişcării.

La anumite viteze de curgere mari, sistemul devine supra-amortizat. Crescând, în continuare, viteza de curgere, sistemul poate prezenta instabilităţi de tipul flambaj şi/sau bătăi (zvâcniri).

Un exemplu clasic de sistem neconservativ este cazul unui tub prin care curge fluid, tub care are capătul din amonte fix, iar cel din aval liber (grindă în consolă). Dacă şi capătul din aval este fixat, sistemul poate fi considerat conservativ.

Pentru un fluid în curgere, ecuaţiile de mişcare conţin termeni cu derivate mixte. Din punct de vedere fizic, acestea sunt asociate cu forţele Coriolis. Datorită prezenţei lor sistemul este anizotropic, adică viteza de fază şi viteza de grup sunt diferite în direcţia amonte faţă de direcţia aval.

S-au corelat cu acceleraţia Coriolis şi alte fenomene interesante, cum ar fi

- nu există moduri normale în sisteme finite deoarece nu există unde staţionare;
- pentru anumite valori ale frecvenţelor există unde întârziate;
- frecvenţa de tăiere a unui mod de vibrare este coborâtă de fluidul în mişcare şi nu corespunde unui număr de undă zero;
- sistemul poate fi stabilizat sau destabilizat de către forţele Coriolis.

Şi efectul presiunii statice a fluidului poate fi semnificativ, prin apariţia unei deformaţii statice. În bare va exista o forţă laterală (transversală) a cărei acţiune este echivalentă unei compresii axiale. Astfel, crescând presiunea statică, se tinde să se reducă frecvenţa de oscilaţie şi, prin presurizare, se poate induce flambajul.

Într-un sistem constituit din mai multe structuri, cum ar fi, de exemplu, un fascicul de elemente combustibile, apar interacţiuni între acestea. Sunt importante două efecte:

- datorită creşterii masei adiţionale, frecvenţele şi vitezele critice de curgere sunt mai mici decât cele ale unei singure bare supuse unei curgeri paralele;

- frecvenţele şi vitezele critice de curgere pentru sistemul cuplat sunt mai mici decât cele pentru un tub cilindric prin care trece un fluid (tubul de presiune).

Vibraţii subcritice şi instabilităţi

Pentru înţelegerea vibraţiilor subcritice s-au sugerat trei mecanisme:

- vibraţii autoexcitate;
- vibraţii forţate;
- rezonanţa parametrică.

Cercetările efectuate au condus însă la concluzia ca modelul vibraţiilor forţate este cel mai potrivit. În general, este acceptat faptul că o structură supusă unei curgeri externe suportă zgomotul de curgere, care devine primul mecanism (predominant) al excitaţiei forţate.

Excitaţia parametrică apare numai într-o curgere staţionară monofazică, iar vibraţia autoexcitată poate apare şi într-o curgere bifazică, dar efectele lor sunt mult mai reduse în cazul vibraţiilor subcritice.

Fenomene foarte interesante, asociate cu sistemele neconservative, au condus la o serie de cercetări ale sistemului neconservativ tub-fluid. Un subiect controversat asociat cu un astfel de sistem este cel cunoscut ca *efectul de destabilizare al forţelor dependente de viteză*. Viteza de destabilizare obţinută din ecuaţia de mişcare în absenţa forţelor dependente de viteză este mai mică decât viteza de destabilizare obţinută prin includerea în calcule şi a forţelor dependente de viteză. Este un paradox, consecinţă a aplicării necritice a metodei micilor vibraţii. De aceea s-a introdus conceptul de *cuazi-stabilitate*. În cazurile când toate frecvenţele sunt reale, se arată că există o parte considerabilă a regiunii cuazi-stabile, îndepărtată de regiunea de instabilitate, în care acţionează forţele dependente de viteză.

Două proprietăţi interesante în sistemele neconservative structură-fluid sunt:

- efectul de stabilizare al condiţiilor de rezemare;

- efectul de bătăi.

Alături de flambaj şi bătăi mai există şi alte forme de instabilitate în curgerea paralelă. Astfel, în curgerile nestaţionare şi curgerile bifazice, excitaţiile parametrice, datorate schimbărilor periodice ale vitezei de curgere şi ale masei, pot induce rezonanţe parametrice şi rezonanţe combinate. Acest lucru s-a observat în curgerea pulsată, pentru sisteme continue sau discrete, care sunt stabile până la o anumită viteză de curgere şi care îşi pot pierde stabilitatea prin rezonanţe parametrice şi combinate. Mai mult, dacă viteza de curgere creşte, surplusul de energie cinetică cauzează şi el o stare de instabilitate.

Am văzut, deci, că vibraţiile barelor se pot exprima ca moduri normale de încovoiere, ale căror surse (în general aleatoare, dar nu numai) sunt, în special, mecanismele de inducere prin curgerea paralelă stabilizată a fluidului de răcire. O analiză riguroasă a răspunsului unei bare la astfel de excitaţii impune utilizarea analizei Fourier şi a conceptelor statistice.

Bara vibrează având un număr infinit de frecvenţe naturale şi moduri asociate de vibraţie, fapt pentru care, în analizele statistice, se cere folosirea a cât mai multor moduri. Totuşi, deoarece modul fundamental este predominant, se pot accepta simplificările date de folosirea în calcule numai a acestui mod. În acelaşi timp, amplitudinea de vibraţie a barei studiate poate fi descompusă în două componente pe două direcţii perpendiculare.

Astfel, pentru surse de excitare uniform distribuite pe direcţie circumferenţială, o bară cu condiţii de rezemare identice la ambele capete va vibra într-o manieră statistică similară în orice plan. De aceea este suficient să se considere / analizeze doar componenta pe o singură direcţie. Altfel spus, componenta forţei aleatoare pe o direcţie va fi folosită la calcularea amplitudinii vibraţiei numai în direcţia respectivă. Acest lucru permite identificarea barei cu un oscilator cu un singur grad de libertate.

Rezultă, prin urmare, necesitatea caracterizării cât mai exacte a câmpului de presiune din jurul barei, ca şi identificarea, pe cât posibil, a mecanismelor de inducere a vibraţiilor de încovoiere pentru diferite cazuri concrete de funcţionare (sau de experimentare).

Concordanţa dintre datele experimentale şi cele obţinute dintr-un eventual model teoretic al situaţiei reale studiate va depinde şi de îndeplinirea acestor ultime două cerinţe.

O generalizare a ecuaţiei de mişcare

Pentru exemplificarea celor prezentate mai sus, dăm în continuare ecuaţia de mişcare pentru o bară supusă excitaţiilor induse de curgerea paralelă a unui fluid oarecare.

Având viteza medie V, curgerea paralelă a fluidului acţionează asupra unui element de lungime δx cu următoarele forţe suplimentare:

- forţa laterală datorată schimbării momentului lateral al curgerii:

$$F_I = m_a\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 V\,; \qquad m_a = \frac{\pi D^2}{4}\rho_a C_M$$

- forţa de antrenare transversală:

$$F_N = \frac{1}{2}\rho_f D V^2\left(C_D\,sin^2\theta + C_f\,sin\theta\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_a}{D}VC_N\left(\frac{\partial v}{\partial t}+V\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

- forţa de antrenare longitudinală:

$$F_L = \frac{1}{2}\rho_f D V^2 C_f\,cos\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_f}{D}V^2 C_T\,; \qquad C_N = C_T = \frac{4C_f}{\pi C_M}$$

unde: ρ_f = densitatea fluidului; D = diametrul exterior al elementului combustibil; C_M = coeficient de masă adiţională; C_D = coeficient de antrenare laterală; C_f = coeficient de antrenare longitudinală.

În ce priveşte forţa de tensionare N, aceasta este suma dintre tensiunea de montaj, N_0, şi o forţă de tensiune datorată frecării longitudinale cu fluidul aflat în cuegere paralelă:

$$N(L,t) = \frac{1}{2}C'_T m_a V^2$$

unde prin C'_T s-a notat coeficientul de antrenare din partea fluidului.

În aceste condiţii vom avea:

$$N(x,t)=\gamma N_0+\frac{1}{2}C_T'm_aV^2\left[\left(1-\frac{1}{2}\gamma\right)L-x\right]+\frac{1}{2}(1-\gamma)C_T'm_aV^2$$

cu $\gamma = 1$ dacă capătul din aval este simplu sprijinit şi $\gamma = 0$ dacă în capătul din aval avem reazem elastic sau capăt liber.

Cu aceste noi definiţii, ecuaţia vibraţiilor de încovoiere ale barei aflate în curgere paralelă devine:

$$\begin{aligned}
&EI\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4}+\mu I\frac{\partial^5 v(x,t)}{\partial x^4\partial t}+\\
&+\left\{m_aV^2-\gamma N_0-\frac{1}{2}C_T\frac{m_aV^2}{D}\left[\left(1-\frac{1}{2}\gamma\right)L-x\right]-\frac{1}{2}(1-\gamma)C_T'm_aV^2\right\}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}+\\
&+2m_aV\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x\partial t}+\frac{1}{2}(C_N+C_T)\frac{m_aV^2}{D}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}C_N\frac{m_aV}{D}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+\\
&+c_v\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+\left(\rho A+\frac{m_a}{L}\right)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}=q(x,t)
\end{aligned}$$

unde $q(x,t)$ reprezintă forţa exercitată asupra elementului combustibil din partea turbulenţei curgerii.

Fără a insista asupra modului de rezolvare a ecuaţiei de mai sus, vom prezenta doar cele mai importante concluzii calitative ce se pot desprinde dintr-o asemenea analiză:

- funcţie de condiţiile de rezemare la capete, frecvenţa fundamentală poate să crească sau să descrească cu viteza de curgere; pentru o bară cu capetele fixate, frecvenţa fundamentală descreşte cu creşterea vitezei de curgere a fluidului, iar pentru o bară cu capetele libere, frecvenţa fundamentală creşte odată cu creşterea vitezei fluidului;

- masa adiţională creşte considerabil dacă bara are ambele capete fixate; mai mult, în cazul unui fascicul de bare, trebuie luat în considerare şi efectul barelor adiacente;

- amortizarea vibraţiilor este amplificată de creşterea vitezei de curgere a fluidului, datorită forţelor normale de antrenare şi forţelor Coriolis;

- amplitudinea vibraţiilor creşte cu viteza de curgere şi poate fi exprimată printr-o funcţie exponenţială, exponentul depinzând de valoarea forţelor excitatoare, de amortizare, de diametrul hidraulic şi de condiţiile de rezemare la capete;

- crescând rigiditatea reazemelor de la capetele barei se poate reduce valoarea elongaţiilor vibraţiilor de încovoiere.

CONCLUZII

Păstrând simetria dimensiunilor primului şi ultimului capitol, subliniem doar faptul că, în general, studiile teoretice de *Rezistenţa materialelor* se bazează pe modelul idealizat de *bară Bernoulli-Euler* (lungimea » aria secţiunii transversale, oscilaţii mici, etc.).

Luând în calcul şi distribuţia parabolică a forţelor de forfecare în secţiunea transversală, pentru vibraţiile libere ale aşa-numitei *bare Timoshenko* cu rigiditate *EI* constantă se deduce ecuaţia de mişcare:

$$\frac{EI}{\rho A}\cdot\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}-R^2\left(1+\frac{E}{KG}\right)\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2\partial t^2}+R^2\,\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial t^4}=0$$

unde $R = I / A$ şi K este un coeficient de forfecare prin care se introduce distribuţia parabolică. De remarcat prezenţa *derivatei parţiale de ordinul 4 în raport cu timpul*.

BIBLIOGRAFIE

1. ANDO Y. *Three-dimensional theory on the natural vibration of rods* ; Nuclear Engineering and Design Vol.15 (1971)
2. BELYTSCHKO T. *Methods and programs for analysis of fluid-structure systems* ; Nuclear Engineering and Design, Vol.42 (1977)
3. BELYTSCHKO T. *Fluid-structure interactions in light water reactor systems* ; Nuclear Engineering and Design, Vol.60 (1980)
4. BUZDUGAN GH. *Rezistenţa materialelor* ; Editura Tehnică, Bucureşti, 1980
5. BUZDUGAN GH., FETCU L., RADEŞ M. *Vibraţii mecanice* ; Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979
6. CAIUS I. *Mecanică teoretică* ; Editura Didactică şi Pedagogică., Bucureşti, 1980
7. CARLUCCI L.N. *Damping and hydrodynamic mass of a cylinder in two-phase flow* ; Atomic Energy of Canada Limited-7315, 1980
8. CHEN S.S. *Parallel-flow-induced vibration of fuel rods* ; Nuclear Engineering and Design, Vol.18 (1972)
9. DEUTSCH I. *Rezistenţa Materialelor* ; Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979
10. DOCA C. *On the Vibration / Wear Correlations* ; Journal of Materials Science and Technology, Vol.8-No.1/2000, pag.109-114, Coral Press Scientific Publishing, Sofia
11. DOCA C. *Two Theoretical Models for "Flow Assisted Fueling" Changing Sequence in a CANDU Reactor* ; Journal of Materials Science and Technology, Vol.9-No.1/2001, pag.3-11, Coral Press Scientific Publishing, Sofia
12. DOCA C., DOCA L. *Extrapolation of Monotonous Functions using the Linear Correlation Coefficient* ; - Scientific Bulletin of "Politehnica", University of Bucharest, Volume 61, 1999, Number 1-2, pag.177-184
13. DOCA C., DOCA L. *A Model of the Laminar Flow with Phase Exchange for Real Liquids. Quantitative Measurement of the H_2O Losses through the Imperfect Tightness in a High Pressure and Temperature Installation* ; Scientific Bulletin of "Politehnica" University of Bucharest, Volume 61, 1999, Number 1-2, pag.185-194

14. DOCA C, DOCA L., BÎRNEANU I. *On the Fretting Wear in CANDU Pressure Tube* **;** Scientific Bulletin of "Politehnica" University of Bucharest, Serie A, Vol.62-No.2/2000, pag.53-61
15. DOCA C., PĂNESCU M. *On the Thermal Conductivity of Sodium Vapour ;* Studia Univ.Babeş - Bolyai Cluj- Napoca, Physica, XXXIV, 1, 1990, pag.53-61
16. ELVIS P.D. *Flow Induced Vibrations* ; Von Fostrand Reinhals Co. 1977
17. FERTIS D.G. *Dynamics and Vibrations of Structures* ; Jhon Wiley & Soons, New York, 1973
18. GORDIS K. *Outline of dynamic analysis for piping systems* ; Nuclear Engineering and Design, Vol.52 (1979)
19. KERLIN T.W. *Frequency response testing in nuclear reactor* ; Academic Press, New York, 1974
20. KUZELKA V. *Vibrational response of reactor components to random forces* ; Nuclear Engineering and Design, Vol.72 (1982)
21. MANGERON D., IRIMICIUC N. *Mecanica rigidelor cu aplicaţii în inginerie. Mecanica vibraţiilor sistemelor de rigide* ; Editura Tehnuică, Bucureşti, 1981
22. MASON V.A. *Dynamics of nuclear fuel assemblies in vertical flow channels* ; Atomic Energy of Canada Limited-5976, 1978
23. PAIDOUSSIS M.P. *Dynamics of flexible cylinders in axial flow* ; Atomic Energy of Canada Limited-6387, 1979
24. PETTGREW M.J. *Dynamics and stability of flexible cylinders subjected to axial flow*; Atomic Energy of Canada Limited-5502, 1976
25. PETTIGREW M.J. *Flow induced vibration of nuclear power station components* ; Atomic Energy of Canada Limited-5852, 1977
26. PETTGREW M.J. *Flow- induced vibration in nuclear power station components* ; Atomic Energy of Canada Limited-7291, 1981
27. POSEA N. *Rezistenţa materialelor* ; Editura Didactică şi Pedagigică, Bucureşti, 1979
28. RADEŞ M. *Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice* ; Editura Acaddemiei RSR, 1979
29. ROSINGER H.E., RITCHIE I.G. *On Timoshenko'correction for shear in vibrating isotropic beams*, Atomic Energy of Canada Limited- 57644, 1977
30. ROŞCULEŢ M. *Analiză matematică* ; Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti,
31. TAKEUCHI K. *Evaluation of hydrodynamic mass methods*; Nuclear Engineering and Design, Vol.70 (1982)

ANEXE

ANEXA A – Funcţii hiperbolice

Definiţii şi identităţi:

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad x \in \Re$$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \qquad x \in \Re$$

$$ch(x) + sh(x) = e^x$$

$$ch(x) - sh(x) = e^{-x}$$

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$$

Formulele lui Euler:

$$e^{ix} = cos(x) + i \cdot sin(x)$$

$$e^{-ix} = cos(x) - i \cdot sin(x)$$

Relaţii dintre funcţiile hiperbolice şi cele trigonometrice:

$$sin(x) = -i \cdot sh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$cos(x) = ch(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

ANEXA B – Notaţii şi unităţi de măsură

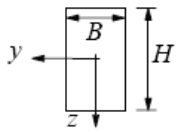
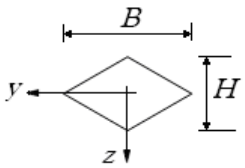
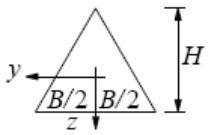
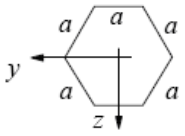
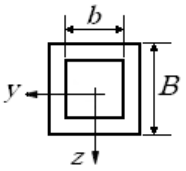
Semnfificaţie	Simbol	Unitate de măsură
Axe de coordonate, cu origine în centrul geometric al secţiunii transversale de arie A	x, y, z	m
Moment de încovoiere	M	Nm
Forţă normală	N	N
Forţă de forfecare pe direcţia i (= y, z)	T_i	N
Sarcină pe unitatea de lungime	$q(x)$	N/m
Forţă externă concentrată	F	N
Aria secţiunii transversale	A	m^2
Lungime	L	m
Deplasarea / deformarea pe direcţia x	$u(x)$	m
Deplasarea / deformarea pe direcţia y	$v(x)$	m
Săgeata de încovoiere pe direcţia z	$w(x)$	m
Moment de inerţie (moment de ordinul II al secţiunii transversale)	I_y, I_z	m^4
Modul de elasticitate (modulul lui Young)	E	N/m^2
Coeficientul lui Poisson	μ	-
Modul de forfecare	G	N/m^2

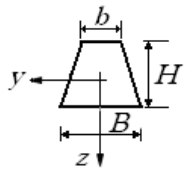
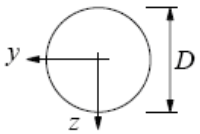
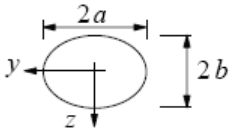
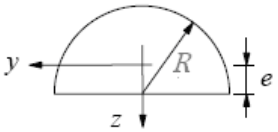
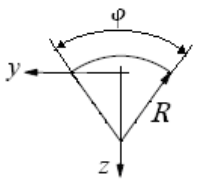
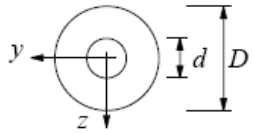
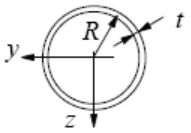
ANEXA C – Momente de inerţie

Dacă *x*, *y* şi *z* sunt coordonate carteziene, atunci momentele de inerţie (momentele de ordinul doi) ale unei secţiuni de arie *A*, perpendiculare pe axa *x* se definesc:

$$I_y = \int_A z^2 dA; \qquad I_z = \int_A y^2 dA; \qquad I_{yz} = \int_A yzdA$$

Tabel 1 – Exemple de formule de calcul al momentului de inerţie

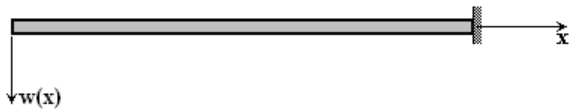
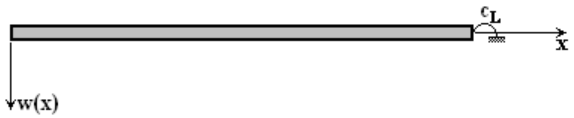
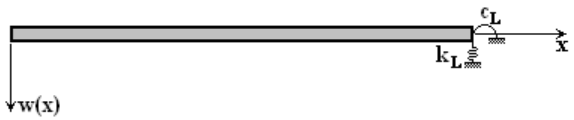
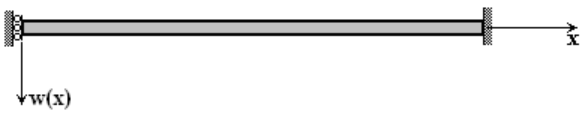
Secţiune transversală	Momente de inerţie
	$I_y = \frac{BH^3}{12}$; $I_z = \frac{HB^3}{12}$
	$I_y = \frac{BH^3}{48}$; $I_z = \frac{HB^3}{48}$
	$I_y = \frac{BH^3}{36}$; $I_z = \frac{HB^3}{48}$
	$I_y = I_z = \frac{5\sqrt{3}}{16}a^4$
	$I_y = I_z = \frac{B^4 - b^4}{12}$

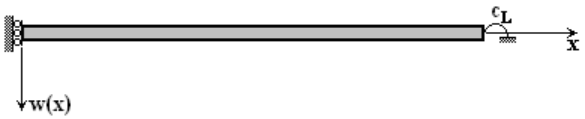
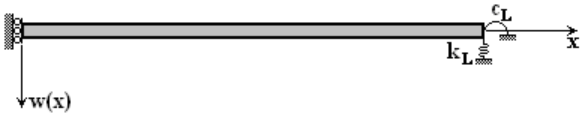
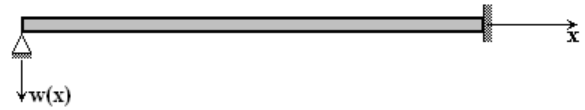
	$I_y = \frac{H^3}{36} \cdot \frac{B^2 + 4Bb + b^2}{B + b}$ $I_z = \frac{H}{48}\left(B^3 + B^2 b + Bb^2 + b^3\right)$
	$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}$
	$I_y = \frac{\pi a b^3}{4}$; $I_z = \frac{\pi b a^3}{4}$
	$I_y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)R^4 \cong 0{,}110R^4$; $e = \frac{4R}{3\pi}$
	$I_y = \frac{R^4}{8}\left[\frac{\pi\varphi}{180} + sin(\varphi) - \frac{64}{9} \cdot \frac{180}{\pi\varphi} sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$ $I_z = \frac{R^4}{8}\left[\frac{\pi\varphi}{180} - sin(\varphi)\right]$
	$I_y = I_z = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$
	$I_y = I_z = \pi R^3 t$

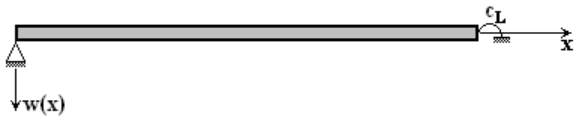
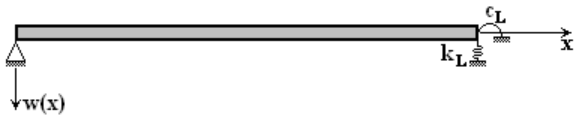
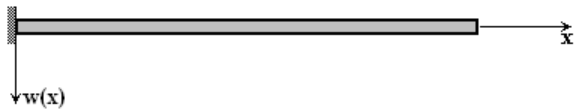
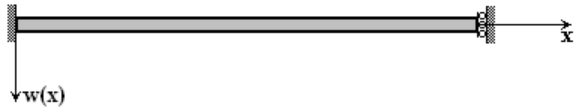
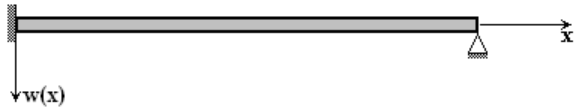
ANEXA D – Rezemarea la capete

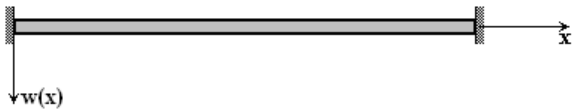
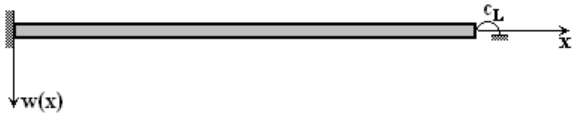
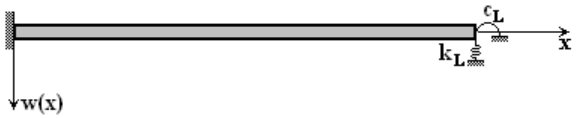
Plecând de la definiţiile reazemelor de capăt „consacrate” (fără forţe concentrate şi momente încovoietoare în abscisele $x_0 = 0$ şi $x_L = L$), fizic sunt posibil următoarele 37 de combinaţii pentru o bară orizontală:

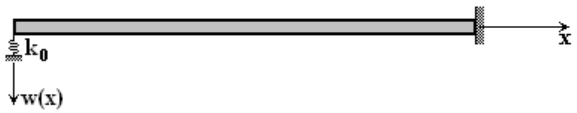
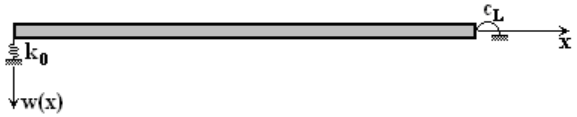
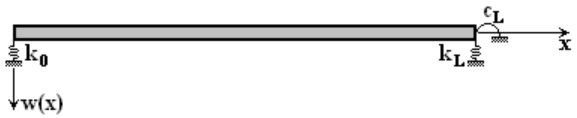
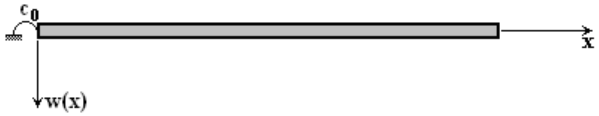
Tabel 2 – Exemple de rezemarea la capete

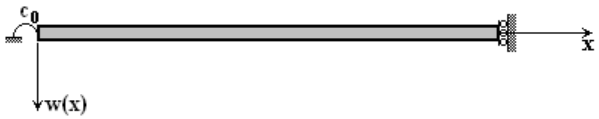
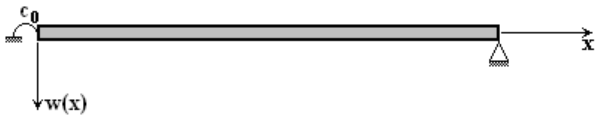
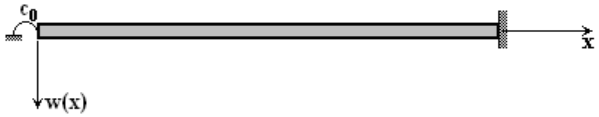
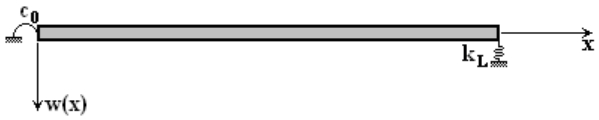
Tip de rezemare / Simbol	Ecuaţii de caracterizare
Capăt liber – încastrare rigidă 	$v''(0)=0$ $v'''(0)=0$ $v(L)=0$ $v'(L)=0$
Capăt liber – încastrare elastică 	$v''(0)=0$ $v'''(0)=0$ $v(L)=0$ $EI\cdot v''(L)-c_L\cdot v'(L)=0$
Capăt liber – rezemare generală 	$v''(0)=0$ $v'''(0)=0$ $EI\cdot v''(L)-c_L\cdot v'(L)=0$ $EI\cdot v'''(L)+k_L\cdot v(L)=0$
Reazem alunecător – încastrare rigidă 	$v'(0)=0$ $v'''(0)=0$ $v(L)=0$ $v'(L)=0$

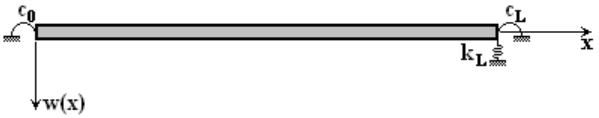
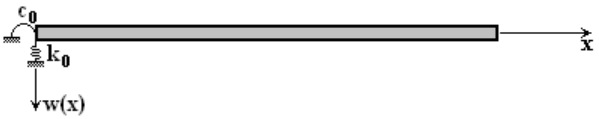
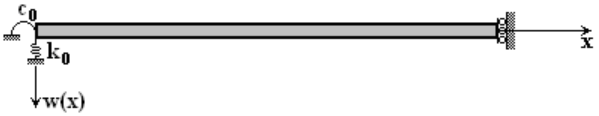
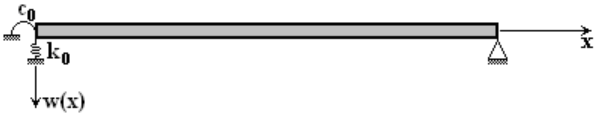
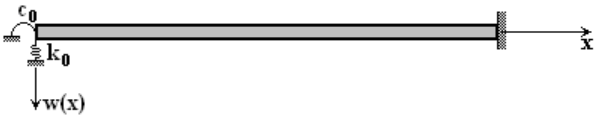
Reazem alunecător – încastrare elastică  	$v'(0)=0$ $v'''(0)=0$ $v(L)=0$ $EI\cdot v''(L)-c_L\cdot v'(L)=0$
Reazem alunecător – rezemare generală  	$v'(0)=0$ $v'''(0)=0$ $EI\cdot v''(L)-c_L\cdot v'(L)=0$ $EI\cdot v'''(L)+k_L\cdot v(L)=0$
Reazem simplu rigid – reazem simplu rigid 	$v(0)=0$ $v''(0)=0$ $v(L)=0$ $v''(L)=0$
Reazem simplu rigid – încastrare rigidă  	$v(0)=0$ $v''(0)=0$ $v(L)=0$ $v'(L)=0$
Reazem simplu rigid – reazem simplu elastic 	$v(0)=0$ $v''(0)=0$ $v''(L)=0$ $EI\cdot v'''(L)+k_L\cdot v(L)=0$

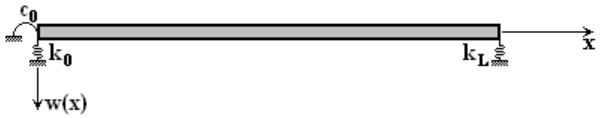
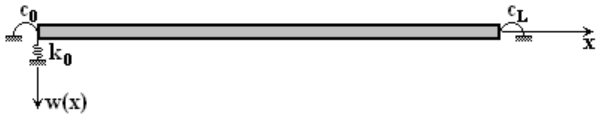
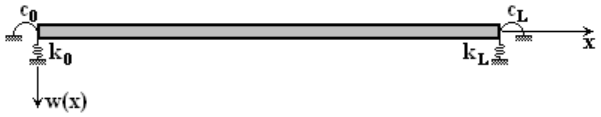
Reazem simplu rigid – încastrare elastică  	$v(0)=0$ $v''(0)=0$ $v(L)=0$ $EI\cdot v''(L)-c_L\cdot v'(L)=0$
Reazem simplu rigid – rezemare generală  	$v(0)=0$ $v''(0)=0$ $EI\cdot v''(L)-c_L\cdot v'(L)=0$ $EI\cdot v'''(L)+k_L\cdot v(L)=0$
Încastrare rigidă – capăt liber  	$v(0)=0$ $v'(0)=0$ $v''(L)=0$ $v'''(L)=0$
Încastrare rigidă – reazem alunecător  	$v(0)=0$ $v'(0)=0$ $v'(L)=0$ $v'''(L)=0$
Încastrare rigidă – reazem simplu rigid  	$v(0)=0$ $v'(0)=0$ $v(L)=0$ $v''(L)=0$

Încastrare rigidă – încastrare rigidă 	$v(0)=0$ $v'(0)=0$ $v(L)=0$ $v'(L)=0$
Încastrare rigidă – reazem simplu elastic 	$v(0)=0$ $v'(0)=0$ $v''(L)=0$ $EI\cdot v'''(L)+k_L\cdot v(L)=0$
Încastrare rigidă – încastrare elastică 	$v(0)=0$ $v'(0)=0$ $v(L)=0$ $EI\cdot v''(L)-c_L\cdot v'(L)=0$
Încastrare rigidă – rezemare generală 	$v(0)=0$ $v'(0)=0$ $EI\cdot v''(L)-c_L\cdot v'(L)=0$ $EI\cdot v'''(L)+k_L\cdot v(L)=0$
Reazem simplu elastic – reazem simplu rigid 	$v''(0)=0$ $EI\cdot v'''(0)+k_0\cdot v(0)=0$ $v(L)=0$ $v''(L)=0$

Reazem simplu elastic – încastrare rigidă  	$v''(0)=0$ $EI\cdot v'''(0)+k_0\cdot v(0)=0$ $v(L)=0$ $v'(L)=0$
Reazem simplu elastic – reazem simplu elastic 	$v''(0)=0$ $EI\cdot v'''(0)+k_0\cdot v(0)=0$ $v''(L)=0$ $EI\cdot v'''(L)+k_L\cdot v(L)=0$
Reazem simplu elastic – încastrare elastică  	$v''(0)=0$ $EI\cdot v'''(0)+k_0\cdot v(0)=0$ $v(L)=0$ $EI\cdot v''(L)-c_L\cdot v'(L)=0$
Reazem simplu elastic – rezemare generală  	$v''(0)=0$ $EI\cdot v'''(0)+k_0\cdot v(0)=0$ $EI\cdot v''(L)-c_L\cdot v'(L)=0$ $EI\cdot v'''(L)+k_L\cdot v(L)=0$
Încastrare elastică – capăt liber  	$v(0)=0$ $EI\cdot v''(0)-c_0\cdot v'(0)=0$ $v''(L)=0$ $v'''(L)=0$

Încastrare elastică – reazem alunecător 	$v(0)=0$ $EI\cdot v''(0)-c_0\cdot v'(0)=0$ $v'(L)=0$ $v'''(L)=0$
Încastrare elastică – reazem simplu rigid 	$v(0)=0$ $EI\cdot v''(0)-c_0\cdot v'(0)=0$ $v(L)=0$ $v''(L)=0$
Încastrare elastică – încastrare rigidă 	$v(0)=0$ $EI\cdot v''(0)-c_0\cdot v'(0)=0$ $v(L)=0$ $v'(L)=0$
Încastrare elastică – reazem simplu elastic 	$v(0)=0$ $EI\cdot v''(0)-c_0\cdot v'(0)=0$ $v''(L)=0$ $EI\cdot v'''(L)+k_L\cdot v(L)=0$
Încastrare elastică – încastrare elastică 	$v(0)=0$ $EI\cdot v''(0)-c_0\cdot v'(0)=0$ $v(L)=0$ $EI\cdot v''(L)-c_L\cdot v'(L)=0$

Încastrare elastică – rezemare generală 	$v(0)=0$ $EI\cdot v''(0)-c_0\cdot v'(0)=0$ $EI\cdot v''(L)-c_L\cdot v'(L)=0$ $EI\cdot v'''(L)+k_L\cdot v(L)=0$
Rezemare generală – capăt liber 	$EI\cdot v''(0)-c_0\cdot v'(0)=0$ $EI\cdot v'''(0)+k_0\cdot v(0)=0$ $v''(L)=0$ $v'''(L)=0$
Rezemare generală – reazem alunecător 	$EI\cdot v''(0)-c_0\cdot v'(0)=0$ $EI\cdot v'''(0)+k_0\cdot v(0)=0$ $v'(L)=0$ $v'''(L)=0$
Rezemare generală – reazem simplu rigid 	$EI\cdot v''(0)-c_0\cdot v'(0)=0$ $EI\cdot v'''(0)+k_0\cdot v(0)=0$ $v(L)=0$ $v''(L)=0$
Rezemare generală – încastrare rigidă 	$EI\cdot v''(0)-c_0\cdot v'(0)=0$ $EI\cdot v'''(0)+k_0\cdot v(0)=0$ $v(L)=0$ $v'(L)=0$

Rezemare generală – reazem simplu elastic 	$EI \cdot v''(0) - c_0 \cdot v'(0) = 0$ $EI \cdot v'''(0) + k_0 \cdot v(0) = 0$ $v''(L) = 0$ $EI \cdot v'''(L) + k_L \cdot v(L) = 0$
Rezemare generală – încastrare elastică 	$EI \cdot v''(0) - c_0 \cdot v'(0) = 0$ $EI \cdot v'''(0) + k_0 \cdot v(0) = 0$ $v(L) = 0$ $EI \cdot v''(L) - c_L \cdot v'(L) = 0$
Rezemare generală – rezemare generală 	$EI \cdot v''(0) - c_0 \cdot v'(0) = 0$ $EI \cdot v'''(0) + k_0 \cdot v(0) = 0$ $EI \cdot v''(L) - c_L \cdot v'(L) = 0$ $EI \cdot v'''(L) + k_L \cdot v(L) = 0$

ANEXA E – Calculul constantelor de integrare pentru o bară fără reazeme intermediare, în cel mai simplu caz de solicitare: fără pat elastic, fără forţă axială, moment de inerţie constant, sarcină distribuită constantă

Aşa cum s-a putut vedea în capitolul ECUAŢII, ALGORITMI ŞI SOLUŢII, prin rezolvarea oricăreia dintre cele 36 de ecuaţii de încovoiere analizate se obţine câte un set corespunzător de patru constante de integrare: C_0, C_1, C_2 şi C_3, necunoscute.

Acelaşi set de patru constante se obţine şi în cazul vibraţiilor de încovoiere.

Aceste necunoscute se evaluează plecând de la ecuaţiile de caracterizare ale reazemelor de capăt şi, dacă ne restrângem doar la cele 37 de situaţii din Tabelul 2, ar rezulta cel puţin $36 \times 37 = 1332$ de descrieri complete privind încovoiere a unei bare studiate. S-a subliniat sintagma *cel puţin* deoarecea acestor tipuri de probleme li se mai poate adăuga încă o mulţime de alte combinaţii înglobând, pe de o parte reazeme „consacrate" şi, pe de altă parte, acţiunea externă în capatele barei fie a unei forţe concentrate, fie a unui moment încovoietor, fie a amândurora.

Din acest noian de posibilităţi, vom prezenta în continuare, ca exemplu de frumuseţe (şi complexitate) a calculului analitic, doar cele mai simple situaţii ce se încadrează cazului de solicitare identificat în titlul prexentei ANEXE.

Astfel, constantele de integrare din soluţia:

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI_0}x^4 + C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0$$

respectiv din derivatele:

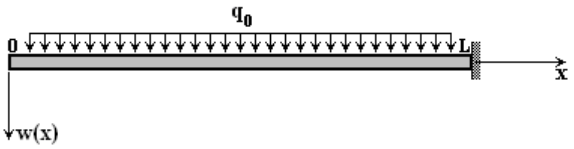
$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{q_0}{6EI_0}x^3 + 3C_3x^2 + 2C_2x + C_1$$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{q_0}{2EI_0}x^2 + 6C_3x + 2C_2$$

$$\frac{d^3w(x)}{dx^3} = \frac{q_0}{EI_0}x + 6C_3$$

se calculează impunând acestor funcţii să satisfacă condiţiilor corespunzătoare naturii reazemelor de capăt din abscisele $x_0 = 0$ şi $x_L = L$, după cum urmează:

- **Capăt liber – încastrare rigidă**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}0 + 6C_3 = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3L^3 + C_2L^2 + C_1L + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3L^2 + 2C_2L + C_1 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = \frac{q_0L^4}{8EI_0}$$

$$C_1 = -\frac{q_0L^3}{6EI_0}$$

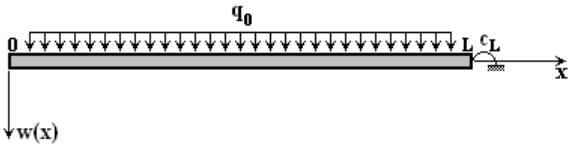
$$C_2 = 0$$

$$C_3 = 0$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24 E I_0}\left(\frac{x^4}{L^4} - 4\frac{x}{L} + 3\right)$$

- **Capăt liber – încastrare elastică**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}0 + 6C_3 = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2 - \frac{c_L}{EI_0}\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = -\frac{q_0(4EI_0 - c_L L)L^3}{8EI_0 c_L}$$

$$C_1 = \frac{q_0(3EI_0 - c_L L)L^2}{6EI_0 c_L}$$

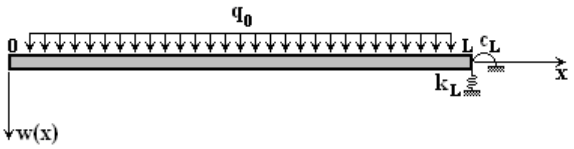
$$C_2 = 0$$

$$C_3 = 0$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^4}{L^4} + 4\frac{3EI_0 - c_L L}{c_L L}\cdot\frac{x}{L} - 3\frac{4EI_0 - c_L L}{c_L L}\right)$$

- **Capăt liber – rezemare generală**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}0 + 6C_3 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2 - \frac{c_L}{EI_0}\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3 + \frac{k_L}{EI_0}\left(\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = -\frac{q_0\left[4EI_0\left(2_0 c_L - k_L L^2\right) - c_L k_L L^3\right]L}{8EI_0 c_L k_L}$$

$$C_1 = \frac{q_0\left(3EI_0 - c_L L\right)L^2}{6EI_0 c_L}$$

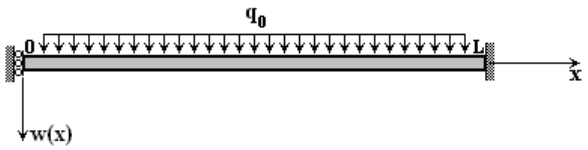
$$C_2 = 0$$

$$C_3 = 0$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left[\frac{x^4}{L^4} + 4\frac{3EI_0 - c_L L}{c_L L}\cdot\frac{x}{L} - 3\frac{4EI_0\left(2_0 c_L - k_L L^2\right) - c_L k_L L^3}{c_L k_L L^3}\right]$$

- **Reazem alunecător – încastrare rigidă**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}0 + 6C_3 = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}$$

$$C_1 = 0$$

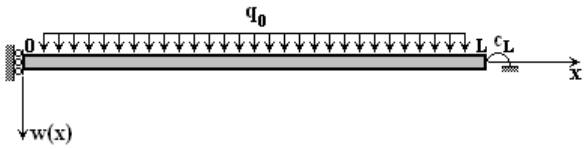
$$C_2 = -\frac{q_0 L^2}{12EI_0}$$

$$C_3 = 0$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^4}{L^4} - 2\frac{x^2}{L^2} + 1\right) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^2}{L^2} - 1\right)^2$$

- **Reazem alunecător – încastrare elastică**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}0 + 6C_3 = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2 - \frac{c_L}{EI_0}\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = \frac{q_0(5EI_0 - c_L L)L^4}{24EI_0(EI_0 - c_L L)}$$

$$C_1 = 0$$

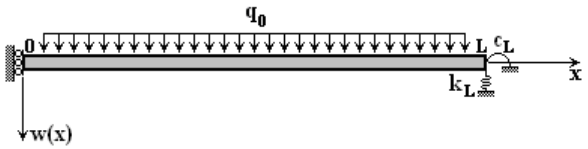
$$C_2 = -\frac{q_0(3EI_0 - c_L L)L^2}{12EI_0(EI_0 - c_L L)}$$

$$C_3 = 0$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^4}{L^4} - 2\frac{3EI_0 - c_L L}{EI_0 - c_L L}\cdot\frac{x^2}{L^2} + \frac{5EI_0 - c_L L}{EI_0 - c_L L}\right)$$

- **Reazem alunecător – rezemare generală**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}0 + 6C_3 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2 - \frac{c_L}{EI_0}\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3 + \frac{k_L}{EI_0}\left(\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = -\frac{q_0\left[24EI_0\left(EI_0 - c_L L\right) - \left(5EI_0 - c_L L\right)k_L L^3\right]L}{24EI_0\left(EI_0 - c_L L\right)k_L}$$

$$C_1 = 0$$

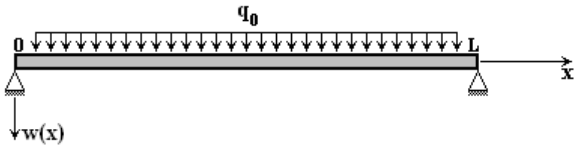
$$C_2 = -\frac{q_0\left(3EI_0 - c_L L\right)L^2}{12EI_0\left(EI_0 - c_L L\right)}$$

$$C_3 = 0$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left[\frac{x^4}{L^4} - 2\frac{3EI_0 - c_L L}{EI_0 - c_L L}\cdot\frac{x^2}{L^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{24EI_0\left(EI_0 - c_L L\right) - \left(5EI_0 - c_L L\right)k_L L^3}{\left(EI_0 - c_L L\right)k_L L^3}\right]$$

- **Reazem simplu rigid – reazem simplu rigid**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2 = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3L + 2C_2 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = \frac{q_0 L^3}{24EI_0}$$

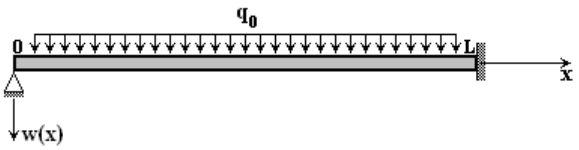
$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{q_0 L}{12EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^3}{L^3} - 2\frac{x^2}{L^2} + 1\right)\cdot\frac{x}{L}$$

- **Reazem simplu rigid – încastrare rigidă**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2 = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3L^2 + 2C_2L + C_1 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = \frac{q_0 L^3}{48EI_0}$$

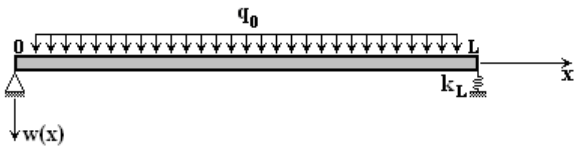
$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{q_0 L}{16EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{48EI_0}\left(2\frac{x^3}{L^3} - 3\frac{x^2}{L^2} + 1\right)\cdot\frac{x}{L}$$

- **Reazem simplu rigid – reazem simplu elastic**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3 + \frac{k_L}{EI_0}\left(\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3L^3 + C_2L^2 + C_1L + C_0\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = -\frac{q_0\left(12EI_0 - k_L L^3\right)}{24EI_0 k_L}$$

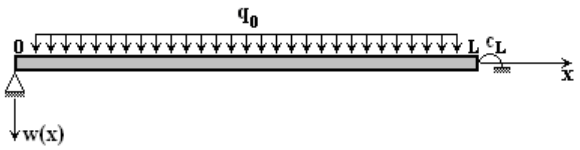
$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{q_0 L}{12EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^3}{L^3} - 2\frac{x^2}{L^2} - \frac{12EI_0 - k_L L^3}{k_L L^3}\right)\cdot\frac{x}{L}$$

- **Reazem simplu rigid – încastrare elastică**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2 = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3L^3 + C_2L^2 + C_1L + C_0 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3L + 2C_2\right) - c_L\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3L^2 + 2C_2L + C_1\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = \frac{q_0(6EI_0 - c_LL)L^3}{48EI_0(3EI_0 - c_LL)}$$

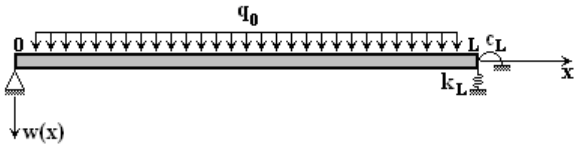
$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{q_0(4EI_0 - c_LL)L}{16EI_0(3EI_0 - c_LL)}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0L^4}{48EI_0}\left(2\frac{x^3}{L^3} - 3\frac{4EI_0 - c_LL}{3EI_0 - c_LL}\cdot\frac{x^2}{L^2} + \frac{6EI_0 - c_LL}{3EI_0 - c_LL}\right)\cdot\frac{x}{L}$$

- **Reazem simplu rigid – rezemare generală**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2+6C_3 0+2C_2=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}L^2+6C_3L+2C_2\right)-c_L\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3+3C_3L^2+2C_2L+C_1\right)=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}L+6C_3\right)+k_L\left(\frac{q_0}{24EI_0}L^4+C_3L^3+C_2L^2+C_1L+C_0\right)=0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0=0$$

$$C_1=-\frac{p_0\left\{72E^2I_0^2-\left[6EI_0\left(8c_L+k_LL^2\right)-c_Lk_LL^3\right]L\right\}L^2}{48EI_0\left[3EI_0\left(c_L+k_LL^2\right)-c_Lk_LL^3\right]}$$

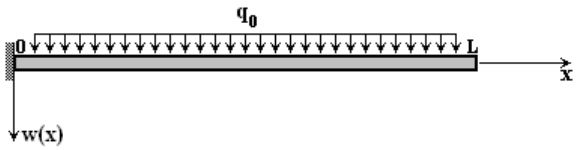
$$C_2=0$$

$$C_3=-\frac{p_0\left[4EI_0\left(2c_L+k_LL^2\right)-c_Lk_LL^3\right]L}{16EI_0\left[3EI_0\left(c_L+k_LL^2\right)-c_Lk_LL^3\right]}$$

şi

$$w(x)=\frac{q_0L^4}{48EI_0}\left\{2\frac{x^3}{L^3}-3\frac{4EI_0\left(2c_L+k_LL^2\right)-c_Lk_LL^3}{\left[3EI_0\left(c_L+k_LL^2\right)-c_Lk_LL^3\right]}\cdot\frac{x^2}{L^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{72E^2I_0^2-\left[6EI_0\left(8c_L+k_LL^2\right)-c_Lk_LL^3\right]L}{\left[3EI_0\left(c_L+k_LL^2\right)-c_Lk_LL^3\right]L}\right\}\cdot\frac{x}{L}$$

- **Încastrare rigidă – capăt liber**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

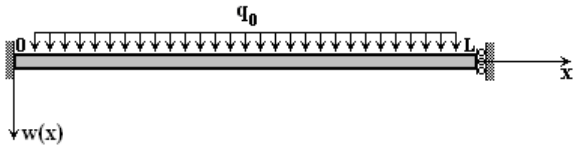
$$C_2 = \frac{q_0 L^2}{4EI_0}$$

$$C_3 = -\frac{q_0 L}{6EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^2}{L^2} - 4\frac{x}{L} + 6\right)\cdot\frac{x^2}{L^2}$$

- **Încastrare rigidă – reazem alunecător**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

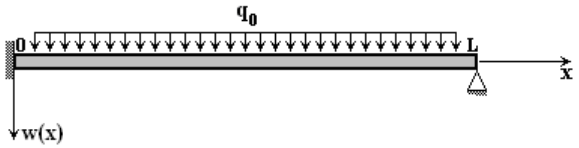
$$C_2 = \frac{q_0 L^2}{6EI_0}$$

$$C_3 = -\frac{q_0 L}{6EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^2}{L^2} - 4\frac{x}{L} + 4\right)\cdot\frac{x^2}{L^2} = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x}{L} - 2\right)^2\cdot\frac{x^2}{L^2}$$

- **Încastrare rigidă – reazem simplu rigid**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1 = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

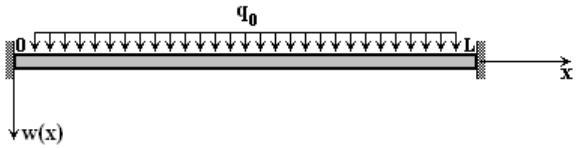
$$C_2 = \frac{q_0 L^2}{16EI_0}$$

$$C_3 = -\frac{5q_0 L}{48EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{48EI_0}\left(2\frac{x^2}{L^2} - 15\frac{x}{L} + 3\right)\cdot\frac{x^2}{L^2}$$

- **Încastrare rigidă – încastrare rigidă**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1 = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

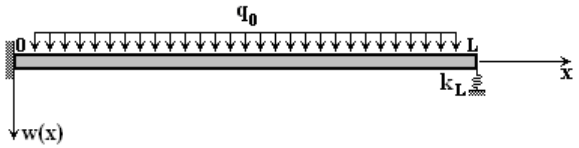
$$C_2 = \frac{q_0 L^2}{24EI_0}$$

$$C_3 = -\frac{q_0 L}{12EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x}{L} + 1\right)\cdot\frac{x^2}{L^2} = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2\cdot\frac{x^2}{L^2}$$

- **Încastrare rigidă – reazem simplu elastic**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3\right) + k_L\left(\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3L^3 + C_2L^2 + C_1L + C_0\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

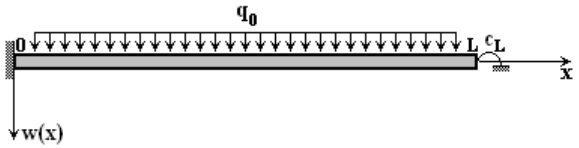
$$C_2 = \frac{q_0\left(12EI_0 - k_L L^3\right)L^2}{16EI_0\left(3EI_0 - k_L L^3\right)}$$

$$C_3 = -\frac{q_0\left(24EI_0 - 5k_L L^3\right)L}{48EI_0\left(3EI_0 - k_L L^3\right)}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{48EI_0}\left(2\frac{x^2}{L^2} - \frac{24EI_0 - 5k_L L^3}{3EI_0 - k_L L^3}\cdot\frac{x}{L} + 3\frac{12EI_0 - k_L L^3}{3EI_0 - k_L L^3}\right)\cdot\frac{x^2}{L^2}$$

- **Încastrare rigidă – încastrare elastică**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1 = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2\right) - c_L\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

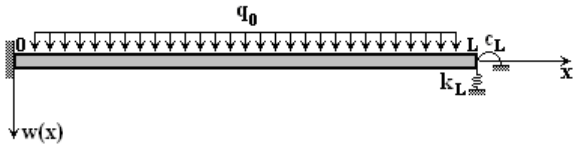
$$C_2 = \frac{q_0(6EI_0 - c_L L)L^2}{24EI_0(4EI_0 - c_L L)}$$

$$C_3 = -\frac{q_0(5EI_0 - c_L L)L}{12EI_0(4EI_0 - c_L L)}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{5EI_0 - c_L L}{4EI_0 - c_L L}\cdot\frac{x}{L} + \frac{6EI_0 - c_L L}{4EI_0 - c_L L}\right)\cdot\frac{x^2}{L^2}$$

- **Încastrare rigidă – rezemare generală**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2\right) - c_L\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1\right) = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3\right) + k_L\left(\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

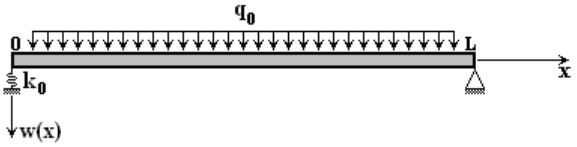
$$C_2 = \frac{q_0\left\{EI_0\left[12EI_0 - \left(8c_L + k_L L^2\right)L\right] + c_L k_L L^4\right\}L^2}{4EI_0\left\{4EI_0\left[3EI_0 - \left(3c_L + k_L L^2\right)L\right] + c_L k_L L^4\right\}}$$

$$C_3 = -\frac{q_0\left\{EI_0\left[24EI_0 - \left(24c_L + 5k_L L^2\right)L\right] + c_L k_L L^4\right\}L}{12EI_0\left\{4EI_0\left[3EI_0 - \left(3c_L + k_L L^2\right)L\right] + c_L k_L L^4\right\}}$$

şi

$$w(x)=\frac{q_0L^4}{24EI_0}\left\{\frac{x^2}{L^2}-2\frac{EI_0\left[24EI_0-\left(24c_L+5k_LL^2\right)L\right]+c_Lk_LL^4}{4EI_0\left[3EI_0-\left(3c_L+k_LL^2\right)L\right]+c_Lk_LL^4}\cdot\frac{x}{L}+\right.$$
$$\left.+6\frac{EI_0\left[12EI_0-\left(8c_L+k_LL^2\right)L\right]+c_Lk_LL^4}{4EI_0\left[3EI_0-\left(3c_L+k_LL^2\right)L\right]+c_Lk_LL^4}\right\}\cdot\frac{x^2}{L^2}$$

- **Reazem simplu elastic – reazem simplu rigid**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2+6C_3 0+2C_2=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}0+6C_3\right)+k_0\left(\frac{q_0}{24EI_0}0^4+C_3 0^3+C_2 0^2+C_1 0+C_0\right)=0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4+C_3L^3+C_2L^2+C_1L+C_0=0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2+6C_3L+2C_2=0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0=\frac{q_0L}{2k_0}$$

$$C_1=-\frac{q_0\left(12EI_0-k_0L^3\right)}{24EI_0k_0}$$

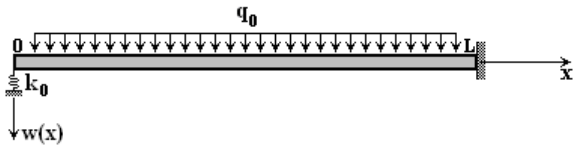
$$C_2=0$$

$$C_3 = -\frac{q_0 L}{12EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^4}{L^4} - 2\frac{x^3}{L^3} - \frac{12EI_0 - k_0 L^3}{k_0 L^3}\cdot\frac{x}{L} + \frac{12EI_0}{k_0 L^3}\right)$$

- **Reazem simplu elastic – încastrare rigidă**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}0 + 6C_3\right) + k_0\left(\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = \frac{3q_0 L^4}{8\left(3EI_0 + k_0 L^3\right)}$$

$$C_1 = -\frac{q_0\left(24EI_0 - k_0 L^3\right)L^3}{48EI_0\left(3EI_0 + k_0 L^3\right)}$$

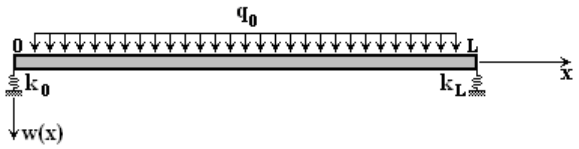
$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{q_0 k_0 L^4}{16EI_0\left(3EI_0 + k_0 L^3\right)}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{48EI_0}\left(2\frac{x^4}{L^4} - \frac{3k_0 L^3}{3EI_0 + k_0 L^3}\cdot\frac{x^3}{L^3} - \frac{24EI_0 - k_0 L^3}{3EI_0 + k_0 L^3}\cdot\frac{x}{L} + \right.$$
$$\left. + \frac{18EI_0}{3EI_0 + k_0 L^3}\right)$$

- **Reazem simplu elastic – reazem simplu elastic**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}0 + 6C_3\right) + k_0\left(\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3\right) + k_L\left(\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = \frac{q_0 L}{2k_0}$$

$$C_1 = -\frac{q_0\left[12EI_0(k_0 + k_L) - k_0 k_L L^3\right]}{24EI_0 k_0 k_L}$$

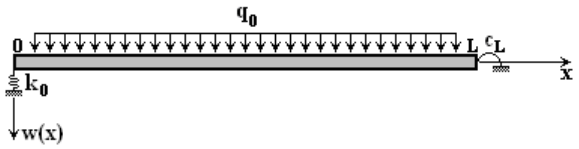
$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{q_0 L}{12EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left[\frac{x^4}{L^4} - 2\frac{x^3}{L^3} - \frac{12EI_0(k_0 + k_L) - k_0 k_L L^3}{k_0 k_L L^3}\cdot\frac{x}{L} + \frac{12EI_0}{k_0 L^3}\right]$$

- **Reazem simplu elastic – încastrare elastică**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}0 + 6C_3\right) + k_0\left(\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2\right) - c_L\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = -\frac{3q_0\left(4EI_0 - c_L L\right)L^3}{8\left[3EI_0\left(c_L - k_0L^2\right) + c_L k_0 L^3\right]}$$

$$C_1 = \frac{q_0\left\{6EI_0\left[12EI_0 - \left(4c_L + k_0L^2\right)L\right] + c_L k_0 L^4\right\}L^2}{48EI_0\left[3EI_0\left(c_L - k_0L^2\right) + c_L k_0 L^3\right]}$$

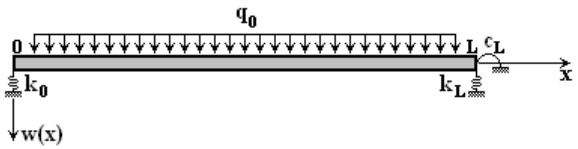
$$C_2 = 0$$

$$C_3 = \frac{q_0\left(4EI_0 - c_L L\right)k_0 L^3}{16EI_0\left[3EI_0\left(c_L - k_0L^2\right) + c_L k_0 L^3\right]}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{48EI_0}\left\{2\frac{x^4}{L^4} + 3\frac{\left(4EI_0 - c_L L\right)k_0L^2}{3EI_0\left(c_L - k_0L^2\right) + c_L k_0 L^3}\cdot\frac{x^3}{L^3} + \right.$$
$$+ \frac{6EI_0\left[12EI_0 - \left(4c_L + k_0L^2\right)L\right] + c_L k_0 L^4}{\left[3EI_0\left(c_L - k_0L^2\right) + c_L k_0 L^3\right]L}\cdot\frac{x}{L} -$$
$$\left. - \frac{9EI_0\left(4EI_0 - c_L L\right)}{\left[3EI_0\left(c_L - k_0L^2\right) + c_L k_0 L^3\right]L}\right\}$$

- **Reazem simplu elastic – rezemare generală**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}0+6C_3\right)+k_0\left(\frac{q_0}{24EI_0}0^4+C_3 0^3+C_2 0^2+C_1 0+C_0\right)=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}L^2+6C_3 L+2C_2\right)-c_L\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3+3C_3 L^2+2C_2 L+C_1\right)=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}L+6C_3\right)+k_L\left(\frac{q_0}{24EI_0}L^4+C_3 L^3+C_2 L^2+C_1 L+C_0\right)=0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0=\frac{3q_0\left[4EI_0\left(2c_L+k_L L^2\right)-c_L k_L L^3\right]L^3}{8\left\{3EI_0 k_0 k_L L^2+c_L\left[3EI_0\left(k_0-k_L\right)-k_0 k_L L^3\right]\right\}}$$

$$C_1=-q_0\left(\frac{6EI_0\left\{12EI_0\left(k_0+k_L\right)-\left[4c_L\left(2k_0+k_L\right)+k_0 k_L L^2\right]L\right\}}{48EI_0\left\{3EI_0 k_0 k_L L^2+c_L\left[3EI_0\left(k_0-k_L\right)-k_0 k_L L^3\right]\right\}}+\right.$$
$$\left.+\frac{c_L k_0 k_L L^2}{48EI_0\left\{3EI_0 k_0 k_L L^2+c_L\left[3EI_0\left(k_0-k_L\right)-k_0 k_L L^3\right]\right\}}\right)L^2$$

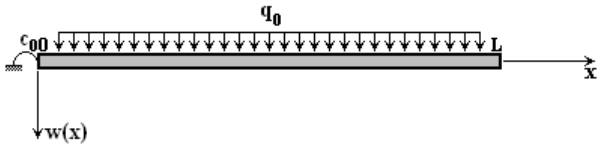
$$C_2=0$$

$$C_3=-\frac{q_0\left[4EI_0\left(2c_L+k_L L^2\right)k_0-c_L k_0 k_L L^3\right]k_0 L}{16EI_0\left\{3EI_0 k_0 k_L L^2+c_L\left[3EI_0\left(k_0-k_L\right)-k_0 k_L L^3\right]\right\}}$$

şi

$$w(x)=\frac{q_0 L^4}{48EI_0}\left(2\frac{x^4}{L^4}-\frac{3\left[4EI_0\left(2c_L+k_L L^2\right)k_0-c_L k_0 k_L L^3\right]k_0}{3EI_0 k_0 k_L L^2+c_L\left[3EI_0\left(k_0-k_L\right)-k_0 k_L L^3\right]}\cdot\frac{x^3}{L^3}-\right.$$
$$-\frac{6EI_0\left\{12EI_0\left(k_0+k_L\right)-\left[4c_L\left(2k_0+k_L\right)+k_0 k_L L^2\right]L\right\}+c_L k_0 k_L L^2}{\left\{3EI_0 k_0 k_L L^2+c_L\left[3EI_0\left(k_0-k_L\right)-k_0 k_L L^3\right]\right\}L}\cdot\frac{x}{L}+$$
$$\left.+\frac{9EI_0\left[4EI_0\left(2c_L+k_L L^2\right)-c_L k_L L^3\right]}{\left\{3EI_0 k_0 k_L L^2+c_L\left[3EI_0\left(k_0-k_L\right)-k_0 k_L L^3\right]\right\}L}\right)$$

- **Încastrare elastică – capăt liber**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2\right) - c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = \frac{q_0 L^2}{2c_0}$$

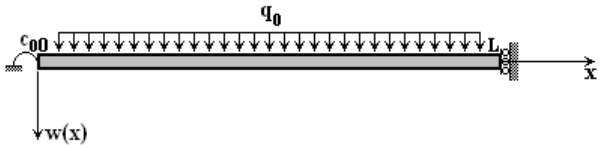
$$C_2 = \frac{q_0 L^2}{4EI_0}$$

$$C_3 = -\frac{q_0 L}{6EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^3}{L^3} - 4\frac{x^2}{L^2} + 6\frac{x}{L} + \frac{12EI_0}{2c_0 L}\right)\cdot\frac{x}{L}$$

- **Încastrare elastică – reazem alunecător**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2\right) - c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = \frac{q_0 L^3}{3\left(EI_0 + c_0 L\right)}$$

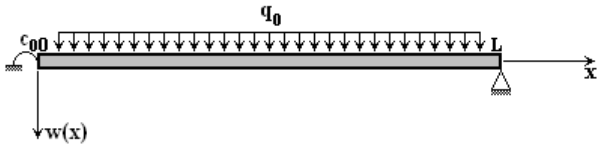
$$C_2 = \frac{q_0 c_0 L^3}{6EI_0\left(EI_0 + c_0 L\right)}$$

$$C_3 = -\frac{q_0 L}{6EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^3}{L^3} - 4\frac{x^2}{L^2} + \frac{4c_0 L}{EI_0 + c_0 L}\cdot\frac{x}{L} + \frac{8EI_0}{EI_0 + c_0 L}\right)\cdot\frac{x}{L}$$

- **Încastrare elastică – reazem simplu rigid**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2\right) - c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = \frac{q_0 L^3}{8(3EI_0 + c_0 L)}$$

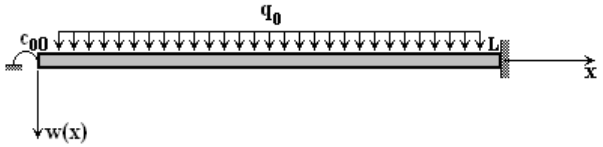
$$C_2 = \frac{q_0 c_0 L^3}{16EI_0(3EI_0 + c_0 L)}$$

$$C_3 = -\frac{q_0(12EI_0 + 5c_0 L)L}{48EI_0(3EI_0 + c_0 L)}$$

şi

$$w(x)=\frac{q_0L^4}{48EI_0}\left(2\frac{x^3}{L^3}-\frac{12EI_0+5c_0L}{3EI_0+c_0L}\cdot\frac{x^2}{L^2}+\frac{3c_0L}{3EI_0+c_0L}\cdot\frac{x}{L}+\right.$$
$$\left.+\frac{6EI_0}{3EI_0+c_0L}\right)\cdot\frac{x}{L}$$

- **Încastrare elastică – încastrare rigidă**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4+C_3 0^3+C_2 0^2+C_1 0+C_0=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2+6C_3 0+2C_2\right)-c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3+3C_3 0^2+2C_2 0+C_1\right)=0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4+C_3L^3+C_2L^2+C_1L+C_0=0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}L^3+3C_3L^2+2C_2L+C_1=0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0=0$$

$$C_1=\frac{q_0L^3}{12(4EI_0+c_0L)}$$

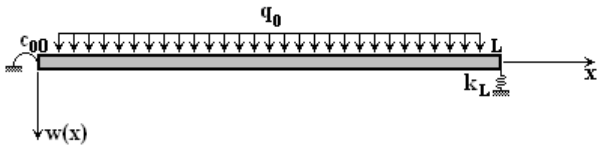
$$C_2=\frac{q_0c_0L^3}{24EI_0(4EI_0+c_0L)}$$

$$C_3 = -\frac{q_0(3EI_0 + c_0L)L}{12EI_0(4EI_0 + c_0L)}$$

şi

$$vw(x) = \frac{q_0L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^3}{L^3} - 2\frac{3EI_0 + c_0L}{4EI_0 + c_0L}\cdot\frac{x^2}{L^2} + \frac{c_0L}{4EI_0 + c_0L}\cdot\frac{x}{L} + \right.$$
$$\left. + \frac{2EI_0}{4EI_0 + c_0L}\right)\cdot\frac{x}{L}$$

- **Încastrare elastică – reazem simplu elastic**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2\right) - c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3L + 2C_2 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3\right) + k_L\left(\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3L^3 + C_2L^2 + C_1L + C_0\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = \frac{q_0\left(12EI_0 - k_L L^3\right)L^2}{4\left[3EI_0\left(c_0 - k_L L^2\right) - c_0 k_L L^3\right]}$$

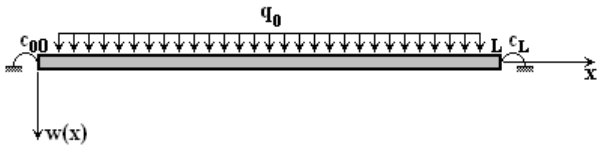
$$C_2 = \frac{q_0\left(12EI_0 - k_L L^3\right)L^2}{16EI_0\left[3EI_0\left(c_0 - k_L L^2\right) - c_0 k_L L^3\right]}$$

$$C_3 = -\frac{q_0\left[12EI_0\left(2c_0 - k_L L^2\right) - 5c_0 k_L L^3\right]L}{48EI_0\left[3EI_0\left(c_0 - k_L L^2\right) - c_0 k_L L^3\right]}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{48EI_0}\left\{2\frac{x^3}{L^3} - \frac{12EI_0\left(2c_0 - k_L L^2\right) - 5c_0 k_L L^3}{3EI_0\left(c_0 - k_L L^2\right) - c_0 k_L L^3}\cdot\frac{x^2}{L^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{3\left(12EI_0 - k_L L^3\right)}{3EI_0\left(c_0 - k_L L^2\right) - c_0 k_L L^3}\cdot\frac{x}{L} + \frac{12EI_0\left(12EI_0 - k_L L^3\right)}{\left[3EI_0\left(c_0 - k_L L^2\right) - c_0 k_L L^3\right]L}\right\}\cdot\frac{x}{L}$$

- **Încastrare elastică – încastrare elastică**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2\right) - c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}L^2+6C_3L+2C_2\right)-c_L\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3+3C_3L^2+2C_2L+C_1\right)=0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0=0$$

$$C_1=\frac{q_0(6EI_0-c_LL)L^3}{12\{4EI_0[EI_0+(c_0-c_L)L]-c_0c_LL^2\}}$$

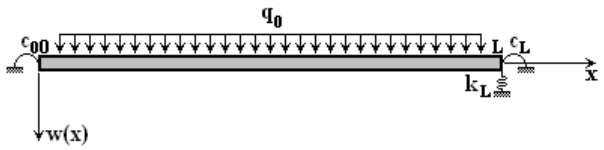
$$C_2=\frac{q_0(6EI_0-c_LL)c_0L^3}{24EI_0\{4EI_0[EI_0+(c_0-c_L)L]-c_0c_LL^2\}}$$

$$C_3=-\frac{q_0\{EI_0[12EI_0+(5c_0-3c_L)L]-c_0c_LL^2\}L}{12EI_0\{4EI_0[EI_0+(c_0-c_L)L]-c_0c_LL^2\}}$$

şi

$$w(x)=\frac{q_0L^4}{24EI_0}\left\{\frac{x^3}{L^3}-2\frac{EI_0[12EI_0+(5c_0-3c_L)L]-c_0c_LL^2}{4EI_0[EI_0+(c_0-c_L)L]-c_0c_LL^2}\cdot\frac{x^2}{L^2}+\right.$$
$$+\frac{(6EI_0-c_LL)c_0L}{4EI_0[EI_0+(c_0-c_L)L]-c_0c_LL^2}\cdot\frac{x}{L}+$$
$$\left.+\frac{2EI_0(6EI_0-c_LL)}{4EI_0[EI_0+(c_0-c_L)L]-c_0c_LL^2}\right\}\cdot\frac{x}{L}$$

- **Încastrare elastică – rezemare generală**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0 = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2\right) - c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1\right) = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2\right) - c_L\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1\right) = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3\right) + k_L\left(\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0\right) = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = 0$$

$$A_1 = q_0\left\{6EI_0\left[12EI_0 - \left(8c_L + k_L L^2\right)L\right] + c_L k_L L^4\right\}L^2$$

$$B_1 = 12\left(4EI_0\left[-3EI_0\left(c_L + k_L L^2\right) + c_L k_L L^3\right] + \right.$$
$$\left. + c_0\left\{4EI_0\left[3EI_0 - \left(3c_L k_L L^2\right)\right] + c_L k_L L^4\right\}\right)$$

$$C_1 = \frac{A_1}{B_1}$$

$$A_2 = q_0\left\{6EI_0\left[12EI_0 - \left(8c_L + k_L L^2\right)\right] + c_L k_L L^2\right\}c_0 L^2$$

$$B_2 = 24\left(4EI_0\left[-3EI_0\left(c_L + k_L L^2\right) + c_L k_L L^3\right] + \right.$$
$$\left. + c_0\left\{4EI_0\left[3EI_0 - \left(3c_L k_L L^2\right)\right] + c_L k_L L^4\right\}\right)$$

$$C_2 = \frac{A_2}{B_2}$$

$$A_3 = q_0\left(3EI_0\left[4EI_0\left(2c_L + k_L L^2\right) - c_L k_L L^3\right] + \right.$$
$$\left. + c_0\left\{-EI_0\left[24EI_0 - \left(24c_L + 5k_L L^2\right)L\right] - c_L k_L L^4\right\}\right)L$$

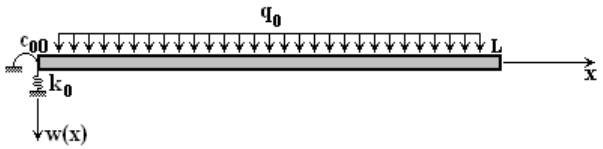
$$B_3 = 12\Big(4EI_0\Big[-3EI_0\left(c_L + k_L L^2\right) + c_L k_L L^3\Big] + \\ + c_0\left\{4EI_0\Big[3EI_0 - \left(3c_L k_L L^2\right)\Big] + c_L k_L L^4\right\}\Big)$$

$$C_3 = \frac{A_3}{B_3}$$

şi

$$w(x) = \left(x^3 + C_3 x^2 + C_2 x + C_1\right)x$$

- **Rezemare generală – capăt liber**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2\right) - c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1\right) = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}0 + 6C_3\right) + k_0\left(\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3 L + 2C_2 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = \frac{q_0 L}{k_0}$$

$$C_1 = \frac{q_0 L^2}{2c_0}$$

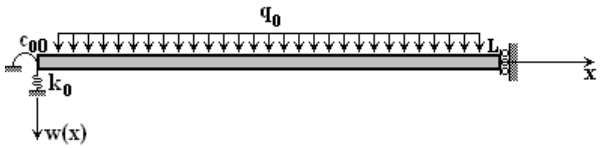
$$C_2 = \frac{q_0 L^2}{4EI_0}$$

$$C_3 = -\frac{q_0 L}{6EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^4}{L^4} - 4\frac{x^3}{L^3} + 6\frac{x^2}{L^2} + \frac{12EI_0}{c_0 L}\cdot\frac{x}{L} + \frac{24EI_0}{k_0 L^3}\right)$$

- **Rezemare generală – reazem alunecător**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2\right) - c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1\right) = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}0 + 6C_3\right) + k_0\left(\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}L^3 + 3C_3 L^2 + 2C_2 L + C_1 = 0$$

$$\frac{q_0}{EI_0}L + 6C_3 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = \frac{q_0 L}{k_0}$$

$$C_1 = \frac{q_0 L^3}{3\left(EI_0 + c_0 L\right)}$$

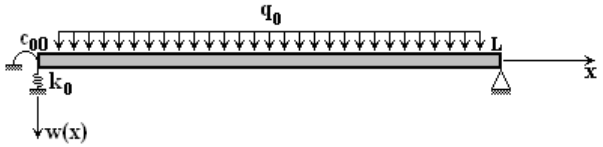
$$C_2 = \frac{q_0 c_0 L^3}{6EI_0\left(EI_0 + c_0 L\right)}$$

$$C_3 = -\frac{q_0 L}{6EI_0}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24EI_0}\left(\frac{x^4}{L^4} - 4\frac{x^3}{L^3} + \frac{4c_0 L}{EI_0 + c_0 L}\cdot\frac{x^2}{L^2} + \frac{8EI_0}{EI_0 + c_0 L}\cdot\frac{x}{L} + \frac{24EI_0}{k_0 L^3}\right)$$

- **Rezemare generală – reazem simplu rigid**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2\right) - c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1\right) = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}0 + 6C_3\right) + k_0\left(\frac{q_0}{24EI_0}0^4 + C_3 0^3 + C_2 0^2 + C_1 0 + C_0\right) = 0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4 + C_3 L^3 + C_2 L^2 + C_1 L + C_0 = 0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2 + 6C_3L + 2C_2 = 0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0 = \frac{q_0\left(12EI_0 + 5c_0L\right)L^3}{8\left[3EI_0\left(c_0 + k_0L^2\right) + c_0k_0L^3\right]}$$

$$C_1 = -\frac{q_0\left(12EI_0 - 5c_0L\right)L^2}{8\left[3EI_0\left(c_0 + k_0L^2\right) + c_0k_0L^3\right]}$$

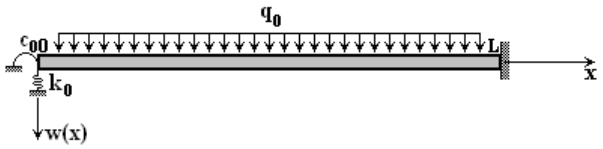
$$C_2 = -\frac{q_0\left(12EI_0 - k_0L^3\right)c_0L^2}{16EI_0\left[3EI_0\left(c_0 + k_0L^2\right) + c_0k_0L^3\right]}$$

$$C_3 = -\frac{q_0\left(12EI_0 + 5k_0L^3\right)k_0L^3}{48EI_0\left[3EI_0\left(c_0 + k_0L^2\right) + c_0k_0L^3\right]}$$

şi:

$$w(x) = \frac{q_0L^4}{48EI_0}\left\{2\frac{x^4}{L^4} - \frac{\left(12EI_0 + 5k_0L^3\right)k_0L^2}{3EI_0\left(c_0 + k_0L^2\right) + c_0k_0L^3}\cdot\frac{x^3}{L^3} - \right.$$
$$- \frac{3\left(12EI_0 - k_0L^3\right)c_0}{3EI_0\left(c_0 + k_0L^2\right) + c_0k_0L^3}\cdot\frac{x^2}{L^2} -$$
$$\left. - \frac{6EI_0\left(12EI_0 - 5c_0L\right)}{\left[3EI_0\left(c_0 + k_0L^2\right) + c_0k_0L^3\right]L}\cdot\frac{x}{L} + \frac{6EI_0\left(12EI_0 + 5c_0L\right)}{\left[3EI_0\left(c_0 + k_0L^2\right) + c_0k_0L^3\right]L}\right\}$$

- **Rezemare generală – încastrare rigidă**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2+6C_3 0+2C_2\right)-c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3+3C_3 0^2+2C_2 0+C_1\right)=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}0+6C_3\right)+k_0\left(\frac{q_0}{24EI_0}0^4+C_3 0^3+C_2 0^2+C_1 0+C_0\right)=0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4+C_3L^3+C_2L^2+C_1L+C_0=0$$

$$\frac{q_0}{6EI_0}L^3+3C_3L^2+2C_2L+C_1=0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0=\frac{q_0\left(3EI_0+c_0L\right)L^4}{2\left\{4EI_0\left[3EI_0+\left(3c_0+k_0L^2\right)L\right]+2c_0k_0L^4\right\}}$$

$$C_1=-\frac{q_0\left(24EI_0-k_0L^3\right)L^3}{12\left\{4EI_0\left[3EI_0+\left(3c_0+k_0L^2\right)L\right]+2c_0k_0L^4\right\}}$$

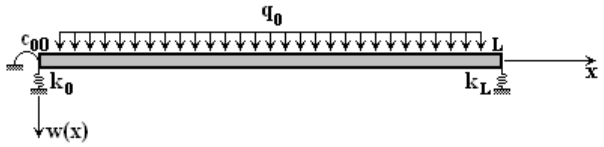
$$C_2=-\frac{q_0\left(24EI_0-k_0L^3\right)c_0L^3}{24EI_0\left\{4EI_0\left[3EI_0+\left(3c_0+k_0L^2\right)L\right]+2c_0k_0L^4\right\}}$$

$$C_3=-\frac{q_0\left(3EI_0+c_0L\right)k_0L^4}{12EI_0\left\{4EI_0\left[3EI_0+\left(3c_0+k_0L^2\right)L\right]+2c_0k_0L^4\right\}}$$

şi

$$w(x)=\frac{q_0L^4}{24EI_0}\left\{\frac{x^4}{L^4}-\frac{2\left(3EI_0+c_0L\right)k_0L^3}{4EI_0\left[3EI_0+\left(3c_0+k_0L^2\right)L\right]+2c_0k_0L^4}\cdot\frac{x^3}{L^3}-\right.$$
$$-\frac{\left(24EI_0-k_0L^3\right)c_0L}{4EI_0\left[3EI_0+\left(3c_0+k_0L^2\right)L\right]+2c_0k_0L^4}\cdot\frac{x^2}{L^2}-$$
$$-\frac{2EI_0\left(24EI_0-k_0L^3\right)}{4EI_0\left[3EI_0+\left(3c_0+k_0L^2\right)L\right]+2c_0k_0L^4}\cdot\frac{x}{L}+$$
$$\left.+\frac{12EI_0\left(3EI_0+c_0L\right)}{4EI_0\left[3EI_0+\left(3c_0+k_0L^2\right)L\right]+2c_0k_0L^4}\right\}$$

- **Rezemare generală – reazem simplu elastic**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2+6C_3 0+2C_2\right)-c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3+3C_3 0^2+2C_2 0+C_1\right)=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}0+6C_3\right)+k_0\left(\frac{q_0}{24EI_0}0^4+C_3 0^3+C_2 0^2+C_1 0+C_0\right)=0$$

$$\frac{q_0}{2EI_0}L^2+6C_3L+2C_2=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}L+6C_3\right)+k_L\left(\frac{q_0}{24EI_0}L^4+C_3L^3+C_2L^2+C_1L+C_0\right)=0$$

se obţin soluţiile:

$$C_0=-\frac{q_0\left[12EI_0\left(2c_0-k_LL^2\right)-5c_0k_LL^3\right]L}{8\left\{3EI_0\left[\left(-k_0+k_L\right)c_0+k_0k_LL^2\right]+c_0k_0k_LL^3\right\}}$$

$$C_1 = \frac{q_0\left[12EI_0(k_0+k_L)-k_0k_LL^3\right]L^2}{8\left\{3EI_0\left[(k_0-k_L)c_0-k_0k_LL^2\right]-c_0k_0k_LL^3\right\}}$$

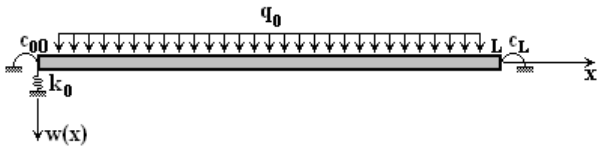
$$C_2 = -\frac{q_0\left[12EI_0(k_0+k_L)-k_0k_LL^3\right]c_0L^2}{16EI_0\left\{3EI_0\left[(-k_0+k_L)c_0+k_0k_LL^2\right]+c_0k_0k_LL^3\right\}}$$

$$C_3 = -\frac{q_0\left[12EI_0(2c_0-k_LL^2)-5c_0k_LL^3\right]k_0L}{48EI_0\left\{3EI_0\left[(k_0-k_L)c_0-k_0k_LL^2\right]-c_0k_0k_LL^3\right\}}$$

şi

$$w(x) = \frac{q_0L^4}{48EI_0}\left(2\frac{x^4}{L^4} - \frac{\left[12EI_0(2c_0-k_LL^2)-5c_0k_LL^3\right]k_0}{3EI_0\left[(k_0-k_L)c_0-k_0k_LL^2\right]-c_0k_0k_LL^3}\cdot\frac{x^3}{L^3} - \right.$$
$$- \frac{3\left[12EI_0(k_0+k_L)-k_0k_LL^3\right]c_0}{3EI_0\left[(-k_0+k_L)c_0+k_0k_LL^2\right]+c_0k_0k_LL^3}\cdot\frac{x^2}{L^2} +$$
$$+ \frac{6EI_0\left[12EI_0(k_0+k_L)-k_0k_LL^3\right]}{\left\{3EI_0\left[(k_0-k_L)c_0-k_0k_LL^2\right]-c_0k_0k_LL^3\right\}L}\cdot\frac{x}{L} -$$
$$\left. - \frac{6EI_0\left[12EI_0(2c_0-k_LL^2)-5c_0k_LL^3\right]}{\left\{3EI_0\left[(-k_0+k_L)c_0+k_0k_LL^2\right]+c_0k_0k_LL^3\right\}L^3}\right)$$

- **Rezemare generală – încastrare elastică**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2 + 6C_3 0 + 2C_2\right) - c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3 + 3C_3 0^2 + 2C_2 0 + C_1\right) = 0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}0+6C_3\right)+k_0\left(\frac{q_0}{24EI_0}0^4+C_3 0^3+C_2 0^2+C_1 0+C_0\right)=0$$

$$\frac{q_0}{24EI_0}L^4+C_3L^3+C_2L^2+C_1L+C_0=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}L^2+6C_3L+2C_2\right)-c_L\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3+3C_3L^2+2C_2L+C_1\right)=0$$

se obţin soluţiile:

$$A_0=q_0\left\{EI_0\left[12EI_0+(5c_0-3c_L)L\right]-c_0c_LL^2\right\}L^3$$

$$\begin{aligned}B_0=2\Big(&4EI_0\left[3EI_0\left(-c_L+k_0L^2\right)-c_Lk_0L^3\right]+\\&+c_0\left\{4EI_0\left[3EI_0+\left(-3c_L+k_0L^2\right)L\right]-c_Lk_0L^4\right\}\Big)\end{aligned}$$

$$C_0=\frac{A_0}{B_0}$$

$$A_1=q_0\left\{6EI_0\left[12EI_0-\left(4c_L+k_0L^2\right)\right]+c_Lk_0L^4\right\}L^2$$

$$\begin{aligned}B_1=12\Big(&4EI_0\left[3EI_0\left(c_L-k_0L^2\right)+c_Lk_0L^3\right]-\\&-c_0\left\{4EI_0\left[3EI_0-\left(3c_L-k_0L^2\right)L\right]-c_Lk_0L^4\right\}\Big)\end{aligned}$$

$$C_1=\frac{A_1}{B_1}$$

$$A_2=q_0\left\{6EI_0\left[12EI_0-\left(4c_L+k_0L^2\right)\right]+c_Lk_0L^4\right\}c_0L^2$$

$$\begin{aligned}B_2=24\Big(&4EI_0\left[3EI_0\left(c_L-k_0L^2\right)+c_Lk_0L^3\right]-\\&-c_0\left\{4EI_0\left[3EI_0-\left(3c_L-k_0L^2\right)L\right]-c_Lk_0L^4\right\}\Big)\end{aligned}$$

$$C_2=\frac{A_2}{B_2}$$

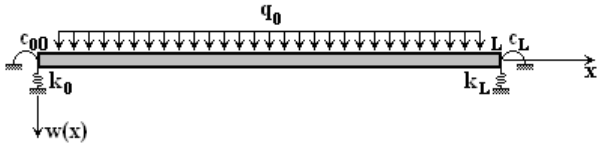
$$A_3 = q_0\left\{EI_0\left[-12EI_0+\left(-5c_0+3c_L\right)L\right]+c_0c_LL^2\right\}k_0L^3$$

$$B_3 = 12\left(4EI_0\left[3EI_0\left(-c_L+k_0L^2\right)-c_Lk_0L^3\right]+\right.$$
$$\left.+c_0\left\{4EI_0\left[3EI_0+\left(-3c_L+k_0L^2\right)L\right]-c_Lk_0L^4\right\}\right)$$

$$C_3 = \frac{A_3}{B_3}$$

şi $$w(x) = \frac{q_0}{24EI_0}x^4 + C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0$$

- **Rezemare generală – rezemare generală**



Rezolvând în necunoscutele C_0, C_1, C_2 şi C_3 sistemul format din cele patru ecuaţii de caracterizare a reazemelor de capăt:

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}0^2+6C_30+2C_2\right)-c_0\left(\frac{q_0}{6EI_0}0^3+3C_30^2+2C_20+C_1\right)=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}0+6C_3\right)+k_0\left(\frac{q_0}{24EI_0}0^4+C_30^3+C_20^2+C_10+C_0\right)=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{2EI_0}L^2+6C_3L+2C_2\right)-c_L\left(\frac{q_0}{6EI_0}L^3+3C_3L^2+2C_2L+C_1\right)=0$$

$$EI_0\left(\frac{q_0}{EI_0}L+6C_3\right)+k_L\left(\frac{q_0}{24EI_0}L^4+C_3L^3+C_2L^2+C_1L+C_0\right)=0$$

se obţin soluţiile:

$$A_0 = q_0 L\left(3EI_0\left[-4EI_0\left(c_L + k_L L^2\right) + c_L k_L L^3\right] + \right.$$
$$\left. + c_0\left\{EI_0\left[24EI_0 - \left(24c_L + 5k_L L^2\right)\right] + c_L k_L L^4\right\}\right)$$

$$B_0 = 2\left[c_0\left(4EI_0\left\{3EI_0\left(k_0 - k_L\right) - \left[3c_L\left(k_0 - k_L\right) + k_0 k_L L^2\right]L\right\} + c_L k_0 k_L L^4\right) + \right.$$
$$\left. + 4EI_0\left\{-3EI_0 k_0 k_L L^2 + c_L\left[3EI_0\left(-k_0 + k_L\right) + k_0 k_L L^3\right]\right\}\right]$$

$$C_0 = \frac{A_0}{B_0}$$

$$A_1 = q_0 L^2\left(6EI_0\left\{12EI_0\left(k_0 + k_L\right) - \left[4c_L\left(2k_0 + k_L\right) + k_0 k_L L^2\right]L\right\}\right)$$

$$B_1 = 12\left[c_0\left(4EI_0\left\{3EI_0\left(k_0 - k_L\right) - \left[3c_L\left(k_0 - k_L\right) + k_0 k_L L^2\right]L\right\} + c_L k_0 k_L L^4\right) + \right.$$
$$\left. + 4EI_0\left\{-3EI_0 k_0 k_L L^2 + c_L\left[3EI_0\left(-k_0 + k_L\right) + k_0 k_L L^3\right]\right\}\right]$$

$$C_1 = \frac{A_1}{B_1}$$

$$A_2 = q_0 L^2\left(6EI_0\left\{12EI_0\left(k_0 + k_L\right) - \left[4c_L\left(2k_0 + k_L\right) + k_0 k_L L^2\right]L\right\}\right)c_0$$

$$B_2 = 12EI_0\left[c_0\left(4EI_0\left\{3EI_0\left(k_0 - k_L\right) - \left[3c_L\left(k_0 - k_L\right) + k_0 k_L L^2\right]L\right\} + c_L k_0 k_L L^4\right) + \right.$$
$$\left. + 4EI_0\left\{-3EI_0 k_0 k_L L^2 + c_L\left[3EI_0\left(-k_0 + k_L\right) + k_0 k_L L^3\right]\right\}\right]$$

$$C_2 = \frac{A_2}{B_2}$$

$$A_3 = q_0 L\left(3EI_0\left[4EI_0\left(c_L + k_L L^2\right) - c_L k_L L^3\right] + \right.$$
$$\left. + c_0\left\{EI_0\left[-24EI_0 + \left(24c_L + 5k_L L^2\right)\right] - c_L k_L L^4\right\}\right)k_0$$

$$B_3 = 12EI_0\left[c_0\left(4EI_0\left\{3EI_0\left(k_0 - k_L\right) - \left[3c_L\left(k_0 - k_L\right) + k_0 k_L L^2\right]L\right\} + c_L k_0 k_L L^4\right) + \right.$$
$$\left. + 4EI_0\left\{-3EI_0 k_0 k_L L^2 + c_L\left[3EI_0\left(-k_0 + k_L\right) + k_0 k_L L^3\right]\right\}\right]$$

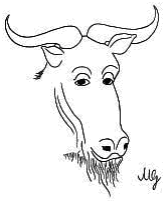
$$C_3 = \frac{A_3}{B_3}$$

şi $$w(x) = \frac{q_0}{24EI_0}x^4 + C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0$$

ANEXA F - LICENŢIEREA GNU FDL

Aceasta este o traducere neoficială în limba română a *Licenţei GNU pentru Documentaţie Liberă* (GNU Free Documentation Licence).

Textul original al licenţei, în limba engleză, se găseşte şi poate fi descărcat de la: http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html



Licenţa GNU pentru Documentaţie Liberă (GNU Free Documentation Licence)

Versiunea 1.2 din noiembrie 2002.

Copyright (C) 2000, 2001, 2002 Free Software Foundation, Inc. 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA

Oricine poate copia şi distribui copii identice ale acestui document, dar modificarea lui nu este permisă.

0. PREAMBUL

Scopul acestei Licenţe este de a conferi unui set de instrucţiuni, manual şcolar sau altui document folositor "libertate", înţeleasă în sensul următor: asigură tuturor libertatea de a copia şi redistribui textul, cu sau fără modificări, în scopuri comerciale şi necomerciale. Ca scop secundar, această Licenţă rezervă pentru autor şi editor dreptul de a fi creditaţi pentru munca lor şi de a nu fi responsabili pentru modificările efectuate de alţii.

Această Licenţă conferă un fel de "copyleft", ceea ce înseamnă că lucrările derivate trebuie să fie şi ele libere în sensul de mai sus. Această Licenţă este inspirată de Licenţa Publică Generală GNU (GNU General Public Licence, GNU GPL), care este o licenţă similară concepută pentru a acoperi softul liber.

Această Licenţă a fost scrisă pentru a acoperi manuale pentru soft liber, pentru că softul liber necesită documentaţie liberă: un program trebuie însoţit de manuale care oferă aceeaşi libertate în folosire ca şi softul. Această Licenţă nu este limitată la manuale pentru soft şi poate fi folosită pentru a acoperi orice lucrare, indiferent de subiect sau de modul de publicare. Această Licenţă este recomandată în principal pentru lucrări care servesc drept referinţă sau au fost scrise în scop de instruire.

1. APLICABILITATE ŞI DEFINIŢII

Această Licenţă se aplică oricărui manual sau lucrări, în orice mediu, care conţine o notă inclusă de către deţinătorul dreptului de autor ce permite distribuţia sub acoperirea acestei Licenţe. Această notă conferă dreptul universal (world-wide), fără indemnizaţie şi nelimitat ca durată de a folosi această lucrare în condiţiile descrise de această Licenţă. Termenul "Documentul" folosit mai jos se referă la manualul sau lucrarea acoperită de Licenţă. Orice membru al publicului este un beneficiar al acestei Licenţe şi va fi desemnat prin termenul "Dvs." sau prin folosirea persoanei a doua. Se consideră în mod automat că aţi acceptat termenii acestei Licenţe dacă copiaţi, modificaţi sau distribuiţi Documentul într-un mod ce necesită permisiunea autorului în conformitate cu legea drepturilor de autor.

O "Versiune Modificată" a Documentului este orice lucrare conţinând Documentul sau o porţiune din Document, copiată identic sau cu modificări şi / sau tradusă într-o altă limbă.

O "Secţiune Secundară" este o anexă cu titlu, sau o secţiune menţionată în cuprins care are ca scop exclusiv descrierea relaţiei editorilor sau a autorilor Documentului cu subiectul Documentului (sau cu subiecte legate de acesta) şi care nu conţine subiecte incluse în mod direct în subiectul Documentului. (Aşadar, dacă Documentul este în parte manual de matematică, o Secţiune Secundară nu poate conţine explicaţii matematice.) Relaţia poate fi o conexiune istorică cu subiectul sau cu problemele înrudite cu subiectul, sau puncte de vedere legale, comerciale, filozofice, etice sau politice legate de acesta.

"Secţiunile Invariante" sunt anumite Secţiuni Secundare ale căror titluri sunt specificate ca fiind titluri de Secţiuni Invariante din Document în nota ce permite distribuţia Documentului sub acoperirea acestei Licenţe. Dacă o secţiune nu este conformă cu definiţia de mai sus a unei Secţiuni Secundare ea nu poate fi desemnată drept Secţiune Invariantă. Documentul poate să nu conţină nici o Secţiune Invariantă. Dacă Documentul nu specifică nici o Secţiune Invariantă se consideră că nu există nici una.

"Textele De Copertă" sunt pasaje scurte de text care sunt listate ca Texte Pentru Coperta I (coperta din faţă) şi Texte Pentru Coperta IV (coperta din spate) în nota ce permite distribuţia Documentului sub acoperirea acestei Licenţe. Un Text Pentru Coperta I poate avea cel mult 5 cuvinte, iar un Text Pentru Coperta IV poate avea cel mult 25 de cuvinte.

O copie "Transparentă" a Documentului este o copie în format electronic, reprezentată într-un format a cărui specificaţie este disponibilă publicului, care este uşor de modificat folosind un editor de text generic sau (pentru imagini compuse din pixeli) un editor grafic generic sau (pentru desene) un editor larg răspândit de grafică vectorială, şi care poate fi folosit de către programe de formatare de text sau de către programe de conversie în alte formate care pot fi folosite ca intrare de către programe de formatare a textului. O copie făcută într-un format de fişier Transparent dar care prin prezenţa sau absenţa anumitor elemente specifice formatului descurajează sau împiedică modificările ulterioare nu este o copie Transparentă. Un format grafic - o imagine - nu este un format Transparent dacă este folosit pentru a reprezenta o cantitate substanţială de text. O copie care nu este "Transparentă" este "Opacă".

Exemple de formate compatibile cu copiile Transparente includ: text ASCII fără marcare, format de intrare Texinfo, format de intrare LaTeX, SGML şi XML folosind un DTD public, HTML simplu şi standard, fişiere PostScript şi PDF modificabile. Exemple de formate Transparente pentru imagine includ PNG, XCF şi JPG. Formatele Opace includ formate de text ce pot fi citite şi editate doar de procesoare de text particulare (proprietary), SGML şi XML pentru care DTD-ul şi / sau uneltele de procesare nu sunt disponibile, HTML generat automat, documente PostScript şi PDF produse de diverse procesoare de text exclusiv în scopul printării / afişării.

"Pagina de Titlu" înseamnă, pentru o carte tipărită, pagina cu titlul şi paginile următoare necesare pentru a tipări lizibil materialul care trebuie tipărit conform acestei Licenţe pe Pagina de Titlu. Pentru lucrări care nu au o pagină cu titlu propriu-zisă "Pagina de Titlu" este textul aflat lângă principala apariţie a titlului lucrării, precedând începutul corpului Documentului.

O secţiune "Numită XYZ" este o secţiune din Document al cărei titlu este fie XYZ sau conţine XYZ în paranteze după textul care traduce XYZ în altă limbă. (Aici XYZ înlocuieşte nume specifice ce vor fi menţionate mai jos, ca de exemplu "Mulţumiri", "Dedicaţii", "Giruri" (Endorsement) şi "Istorie".) A "Păstra Titlul" unei astfel de secţiuni atunci când modificaţi

Documentul înseamnă că aceasta rămâne "Numită XYZ" conform acestei definiţii.

Documentul poate include Limitări de Responsabilitate (Warranty Disclaimers) ataşate notificării care afirmă că această Licenţă se aplică Documentului. Aceste Limitări de Responsabilitate se consideră a fi incluse pentru referinţă în această Licenţă: orice alte implicaţii pe care aceste Limitări de Responsabilitate le-ar putea avea sunt nule şi nu au nici un efect asupra înţelesului acestei Licenţe.

2. COPII IDENTICE

Puteţi copia şi distribui Documentul pe orice mediu, comercial sau necomercial, atâta timp cât această Licenţă, notificările de drepturi de autor şi notificarea de licenţă care spune că această Licenţă se aplică acestui Document sunt reproduse în toate copiile, şi atâta timp cât nu adăugaţi nici un fel de altă condiţie în afară de cele prezente în această Licenţă. Nu aveţi dreptul să luaţi măsuri tehnice de a obstrucţiona sau controla citirea sau recopierea copiilor pe care le faceţi sau le distribuiţi. Aveţi totuşi dreptul să acceptaţi compensaţii în schimbul copiilor. Dacă distribuiţi un număr suficient de mare de copii trebuie să respectaţi şi condiţiile din secţiunea 3.

Aveţi de asemenea dreptul să împrumutaţi copii în aceleaşi condiţii ca cele de mai sus, şi aveţi dreptul să afişaţi copii.

3. COPIEREA ÎN CANTITĂŢI MARI

Dacă publicaţi copii tipărite (sau copii în medii care folosesc de obicei coperte tipărite) ale Documentului, în număr mai mare de 100 şi dacă notificarea de licenţă a Documentului cere Texte de Copertă, trebuie să includeţi copiile pe coperte care să conţină, clar şi lizibil, toate aceste Texte de Copertă: Textele Pentru Coperta I pe coperta I şi Texte Pentru Coperta IV pe coperta IV. Ambele coperte trebuie de asemenea să vă identifice în mod clar şi lizibil ca editor al respectivelor copii. Coperta I trebuie să prezinte titlul în întregime, cu toate cuvintele din titlu la fel de vizibile şi proeminente. Puteţi adăuga alte materiale pe copertă în plus. Copierea cu modificările limitate la coperte, atâta timp cât satisfac aceste condiţii, pot fi tratate în toate celelalte aspecte ca şi copii identice.

Dacă textele necesare pentru oricare dintre coperte sunt prea voluminoase pentru a încăpea în mod lizibil, trebuie să le includeţi pe

primele în ordinea originală (atâtea câte încap în mod rezonabil) pe coperta efectivă şi să continuaţi cu restul pe pagini adiacente.

Dacă publicaţi sau distribuiţi copii Opace ale documentului în număr mai mare de 100, trebuie ori să includeţi câte o copie Transparentă în format electronic împreună cu fiecare copie Opacă, sau să specificaţi în sau împreună cu fiecare copie Opacă o locaţie de reţea electronică la care publicul general care foloseşte reţeaua să aibă acces pentru a descărca, folosind un protocol standard public, copii complete Transparente ale documentului, fără adăugarea oricărui material adiţional. Dacă folosiţi a doua opţiune trebuie să faceţi demersuri rezonabil de prudente ca atunci când începeţi distribuirea copiilor Opace să vă asiguraţi că această copie Transparentă va rămâne accesibilă în acest fel la locaţia respectivă timp de cel puţin un an după distribuţia ultimei copii Opace (în mod direct sau prin agenţi sau distribuitori) a acelei ediţii pentru public.
Se cere, dar nu în mod necesar, să contactaţi autorii Documentului cu o perioadă bună înainte de a distribui orice cantitate mare de copii, pentru a le da ocazia să vă pună la dispoziţie o versiune actualizată a Documentului.

4. MODIFICĂRI

Puteţi copia şi distribui o Versiune Modificată a Documentului în condiţiile secţiunilor 2 şi 3 de mai sus, cu condiţia de a acoperi Versiunea Modificată sub exact această Licenţă, cu Versiunea Modificată ţinând locul Documentului, astfel licenţiind distribuirea şi modificările Versiunii Modificate oricui intră în posesia unei copii ale acesteia. În plus, trebuie să faceţi următoarele lucruri în Versiunea Modificată:

- **A)** *Folosiţi în Pagina de Titlu (şi pe coperte, dacă există) un titlu diferit de cel al Documentului, şi de versiunile sale anterioare (care trebuie, dacă există, să fie listate în secţiunea de Istorie a Documentului). Puteţi folosi acelaşi titlu ca o versiune anterioară dacă editorul original al acelei copii vă dă permisiunea.*
- **B)** *Listaţi pe Pagina de Titlu, ca autori, una sau mai multe dintre persoanele sau entităţile responsabile în calitate de autori pentru modificările Versiunii Modificate, împreună cu cel puţin cinci dintre autorii principali ai Documentului (toţi autorii principali, dacă are mai puţin de cinci), în afară de cazul că aceştia vă eliberează de această obligaţie.*
- **C)** *Includeţi pe Pagina de Titlu numele editorului Versiunii Modificate în calitate de editor.*

D) *Păstraţi toate notificările de drepturi de autor ale Documentului.*

E) *Adăugaţi o notificare de drepturi de autori relevantă pentru modificările Dvs. adiacent celorlalte notificări de drepturi de autor.*

F) *Includeţi, imediat după notificările de drepturi de autor, o notificare de licenţă dând permisiune publică de a folosi Versiunea Modificată în condiţiile acestei Licenţe, sub forma prezentată în Apendicele de mai jos.*

G) *Păstraţi în acea notificare de licenţă lista integrală a Secţiunilor Invariante şi Textele de Copertă necesare date în notificarea de licenţă a Documentului.*

H) *Includeţi o copie nealterată a acestei Licenţe.*

I) *Păstraţi secţiunea Numită "Istorie", Păstraţi-i Titlul şi adăugaţi-i un element care să indice măcar titlul, anul, noii autori şi editorul Versiunii Modificate aşa cum este dat pe Pagina de Titlu. Dacă nu există o secţiune Numită "Istorie" în Document, creaţi una în care indicaţi titlul, anul, autorii şi editorul Documentului aşa cum este dat pe Pagina de Titlu al acestuia şi apoi adăugaţi un element care să descrie Versiunea Modificată aşa cum a fost cerut în fraza precedentă.*

J) *Păstraţi locaţia de reţea, dacă există, dată în Document pentru acces public la o copie Transparentă a Documentului, cât şi locaţiile de reţea date în Document pentru versiunile mai vechi pe care s-a bazat acesta. Acestea pot fi incluse în secţiunea Numită "Istorie". Puteţi omite locaţia de reţea a unei lucrări care a fost publicată cu cel puţin patru ani înainte de Documentul în sine, sau dacă editorul original al versiunii la care se referă vă dă permisiunea.*

K) *Pentru orice secţiune Numită "Mulţumiri" sau "Dedicaţii" Păstraţi Titlul secţiunii şi păstraţi în secţiunile respective toată substanţa şi tonul mulţumirilor şi dedicaţiilor fiecărui contribuitor.*

L) *Păstraţi toate Secţiunile Invariante ale Documentului, nealterate ca text şi ca titluri. Numerotarea secţiunilor sau echivalentul numerotării nu sunt considerate ca făcând parte din titlurile secţiunilor.*

M) *Ştergeţi orice secţiune Numită "Giruri". O astfel de secţiune nu poate fi inclusă în Versiunea Modificată.*

N) *Nu modificaţi titlul nici unei secţiuni existente pentru a fi Numită "Giruri" sau pentru a intra în conflict cu vreo Secţiune Invariantă.*

O) *Păstraţi toate Limitările de Responsabilitate.*

Dacă Versiunea Modificată include secţiuni noi incluse în titlu sau anexe care se califică drept Secţiuni Secundare şi nu conţin material copiat din Document, aveţi dreptul la alegerea Dvs. să numiţi unele sau toate acestea ca fiind secţiuni invariante. Pentru a face aceasta, adăugaţi-le titlurile la lista de Secţiuni Invariante în notificarea de licenţă a Versiunii Modificate. Aceste titluri trebuie să fie distincte faţă de toate celelalte titlurile de secţiune.

Puteţi adăuga o secţiune Numită "Giruri" doar dacă aceasta conţine numai girurile a diverse entităţi asupra Versiunii Modificate - de exemplu recenzii sau faptul că textul a fost aprobat de o organizaţie ca fiind o definiţie autoritară a unui standard.

Puteţi adăuga un pasaj de cel mult cinci cuvinte ca Text Pentru Coperta I şi un pasaj de cel mult 25 de cuvinte ca Text Pentru Coperta IV la sfârşitul Textelor De Copertă în Versiunea Modificată. Numai un singur pasaj poate fi adăugat la Textul Pentru Coperta I şi unul la Textul Pentru Coperta IV de către (sau prin aranjament cu) orice entitate. Dacă Documentul conţine deja texte de copertă pentru coperta respectivă, adăugat în prealabil de Dvs. sau prin aranjament cu aceeaşi entitate în numele căreia acţionaţi, atunci nu puteţi adăuga un altul, însă puteţi să-l înlocuiţi pe cel vechi numai cu permisiunea explicită a editorului anterior care l-a adăugat pe cel vechi.

Autorul (autorii) şi editorul (editorii) Documentului nu vă dau prin această Licenţă permisiunea de a le folosi numele pentru publicitate sau pentru a pretinde sau implica vreo girare a oricărei Versiuni Modificate.

5. COMBINAREA DOCUMENTELOR

Puteţi combina Documentul cu alte documente acoperite de această Licenţă sub termenii definiţi în secţiunea 4 de mai sus pentru versiuni modificate, cu condiţia să includeţi în versiunea combinată toate Secţiunile Invariante ale tuturor documentelor originale, nemodificate, şi să le listaţi pe toate ca Secţiuni Invariante ale versiunii combinate în notificarea de licenţă, cât şi să păstraţi toate Limitările de Responsabilitate.

Versiunea modificată nu trebuie să conţină decât o singură copie a acestei Licenţe, iar duplicatele identice ale Secţiunilor Invariante pot fi

înlocuite cu o singură copie. Dacă există Secţiuni Invariante cu nume identice şi conţinut diferit, schimbaţi-le numele adăugând la sfârşitul titlului, în paranteză, ori numele autorului sau al editorului original al acelei secţiuni dacă acesta este cunoscut, ori un număr unic. Faceţi aceleaşi modificări respective titlurilor secţiunilor în lista de Secţiuni Invariante din notificarea de licenţă a versiunii combinate.

În versiunea combinată trebuie să combinaţi şi toate secţiunile Numite "Istorie" din diversele documente originale, creând o secţiune unică Numită "Istorie"; la fel trebuie să combinaţi şi toate secţiunile Numite "Mulţumiri" cât şi cele Numite "Dedicaţii". Trebuie să ştergeţi toate secţiunile Numite "Giruri".

6. COLECŢII DE DOCUMENTE

Puteţi crea o colecţie formată din Document şi alte documente acoperite de această Licenţă şi să înlocuiţi copiile individuale ale acestei Licenţe din diversele documente cu o singură copie care să fie inclusă în colecţie cu condiţia să urmaţi regulile acestei Licenţe pentru copii identice pentru fiecare document în toate celelalte privinţe.

Puteţi să extrageţi un document dintr-o astfel de colecţie şi să-l distribuiţi individual sub această Licenţă cu condiţia de a include o copie a acestei Licenţe în documentul extras şi să urmaţi condiţiile acestei Licenţe în toate celelalte privinţe în legătură cu copiile identice ale acelui document.

7. AGREGAREA CU LUCRĂRI INDEPENDENTE

O compilaţie a Documentului sau a unui derivat al său cu orice document sau lucrare separată independentă, în sau pe un volum de stocare sau distribuire se numeşte "agregat" dacă drepturile de autor rezultate în urma compilării nu sunt folosite pentru a limita drepturile legale ale utilizatorilor compilaţiei mai mult decât permit lucrările individuale. Când Documentul este inclus într-un agregat, această Licenţă nu se aplică celorlalte lucrări din agregat care nu sunt ele însele rezultate derivate ale Documentului.

Dacă cerinţele legate de Textele de Copertă din secţiunea 3 se aplică acestor copii ale Documentului, atunci dacă Documentul este mai puţin de jumătate din întregul agregat atunci Textele de Copertă ale Documentului pot fi puse pe coperte care să separe Documentul în cadrul agregatului, sau pe un echivalent electronic al acestora, dacă Documentul

se prezintă în format electronic. Altfel ele trebuie să apară pe copertele tipărite care îmbracă întreg agregatul.

8. TRADUCERE

Traducerea este considerată o formă de modificare, drept care puteţi distribui traduceri ale Documentului sub cerinţele secţiunii 4. Înlocuirea Secţiunilor Invariante cu traduceri ale acestora necesită permisiune specială din partea celor care deţin drepturile de autor, însă puteţi include traduceri ale unora dintre sau tuturor Secţiunilor Invariante împreună cu variantele originale ale acestora. Puteţi include o traducere a acestei Licenţe cât şi toate notificările de licenţă din Document, cât şi Limitările de Responsabilitate atâta timp cât includeţi şi versiunea originală în engleză a acestei Licenţe, plus versiunile originale ale respectivelor notificări de licenţă şi limitări de responsabilitate. În cazul apariţiei oricăror discrepanţe între versiunea tradusă şi versiunea originală a acestei Licenţe, a vreunei notificări de licenţă sau a vreunei limitări de responsabilitate, versiunea originală are prioritate.

Dacă vreo secţiune din Document este Numită "Mulţumiri", "Dedicaţii" sau "Istorie" cerinţa (din secţiunea 4) de a-i Păstra Titlul (secţiunea 1) va necesita în mod normal schimbarea titlului în sine.

9. REZILIERE

Nu puteţi copia, modifica, sublicenţia sau distribui Documentul decât în condiţiile specificate explicit în această Licenţă. Orice copiere, modificare sau redistribuire a Documentului în vreo altă condiţie este nulă şi vă va anula în mod automat drepturile conferite de această Licenţă. Pe de altă parte, terţilor cărora le veţi fi transmis copii sau drepturi în conformitate cu această Licenţă nu li se vor anula aceste drepturi atâta timp cât i se conformează.

10. VERSIUNI VIITOARE ALE ACESTEI LICENŢE

Fundaţia Free Software (Free Software Foundation) poate publica versiuni noi, revizuite ale acestei Licenţe (GNU Free Documentation Licence) din timp în timp. Aceste noi versiuni vor păstra spiritul acestei versiuni dar pot diferi în privinţa detaliilor, cu scopul de a se adresa unor noi probleme reale sau potenţiale. Vezi http://www.gnu.org/copyleft/.

Fiecărei versiuni ale acestei Licenţe îi este asociat un număr de versiune distinct. Dacă Documentul specifică un anumit număr de versiune "sau orice versiune ulterioară" al acestei Licenţe, aveţi de ales între a vă conforma termenilor şi condiţiilor ori ale versiunii specificate explicit sau ale oricărei variante ulterioare publicate (nu ca variantă preliminară) de către Free Software Foundation. Dacă Documentul nu specifică un număr de versiune al acestei Licenţe atunci puteţi alege orice versiune publicată (nu ca variantă preliminară) de către Free Software Foundation.